

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

GENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON L. COLLATZ · H. GÖRTLER · J. HEINHOLD · K. KLOTTER
K. MARGUERRE · H. NEUBER · L. SCHMETTERER · K. SCHRÖDER · H. SCHUBERT
W. TOLLMIEH · H. UNGER UND C. WEBER · HERAUSGEGEBEN VON H. HEINRICH, DRESDEN

BAND 41

SEITE 477—520

HEFT 12

DEZEMBER 1961

AUS DEM INHALT:

H A U P T A U F S Ä T Z E

A. Ripianu: Die angenäherte Berechnung der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion / **F. P. J. Rimrott** and **J. R. Luke:** Large Strain Creep of Rotating Cylinders / **N. Yamaki:** Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates

K L E I N E M I T T E I L U N G E N

B U C H B E S P R E C H U N G E N

E I N G E G A N G E N E B Ü C H E R

N A C H R I C H T E N



AKADEMIE-VERLAG GMBH · BERLIN

INHALT:

	Seite
Hauptaufsätze	
A. Ripianu: Die angenäherte Berechnung der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion	477
F. P. J. Rimrott and J. R. Luke: Large Strain Creep of Rotating Cylinders	485
N. Yamaki: Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates	501
Kleine Mitteilungen	
J. Déri: Die Vergrößerung des Halbmessers eines durch Pole begrenzten Konvergenzkreises von Potenzreihen	511
V. Vodička: Steady Temperature in a Composite Circular Cylinder	513
H. Feldmann: Ein hinreichendes Konvergenzkriterium und eine Fehlerabschätzung für die Iteration in Einzelschritten bei linearen Gleichungssystemen	515
Buchbesprechungen	517
Eingegangene Bücher	519
Nachrichten	520
Berichtigungen	520

Wir bitten, alle Manuskriptsendungen direkt an den Herausgeber, Prof. Dr.-Ing. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31, zu richten. Zu den Arbeiten, die als Hauptaufsätze bestimmt sind, erbitten wir auf gesondertem Blatt eine kurze Zusammenfassung des Inhalts, nach Möglichkeit in deutscher, englischer und russischer Sprache; falls die Übersetzungen nicht geliefert werden können, ist wenigstens die Angabe spezieller Fachausdrücke in den verschiedenen Sprachen erwünscht. Die Arbeiten sollen in klarer Schrift, möglichst mit Schreibmaschine, zeitig und einseitig geschrieben sein und die nötigen Hinweise für den Setzer betreffend Schrifttypen (z. B. griechisch, Fraktur), Sperrungen o. a. enthalten. Zur Beschleunigung des Drucks und zur Vermeidung von Satzfehlern empfiehlt es sich, umfangreiche und unübersichtliche Formelausdrücke durch Einführung von Abkürzungen zu vermeiden. Bilder sollen als Tuschzeichnungen auf Transparentpapier (Beschriftung mit Bleistift) oder als saubere Bleistiftskizzen ausgeführt sein. Bildunterschriften sind am Schluß des Textes anzufügen. Sollte die Arbeit bereits an anderer Stelle verbreitet sein (als Dissertation, Forschungsbericht, Manuskriptdruck o. ä.), so ist dies auf der ersten Textseite in einer Fußnote anzugeben. Für die Zusammenstellung der zitierten Literatur, am Schluß der Arbeit, bitten wir, sich einer einheitlichen Notation entsprechend folgendem Muster zu bedienen, z. B. W. Schmeidler, Über die Wärmespannungen in einem Körper, ZAMM 28 (1948), S. 54—59 oder G. Bürgermeister und H. Steup, Stabilitätstheorie I, 1. Aufl., Berlin 1957, Akademie-Verlag, S. 142—147. Die Autoren erhalten von den Hauptaufätzen 75, von den Kleinen Mitteilungen 25 Sonderdrucke ohne Berechnung, darüber hinaus bis zu 250 Sonderdrucke gegen Berechnung.

Der Verlag behält sich für alle Beiträge das Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung vor.

Band 1—7 erschien innerhalb der Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik

Ab Band 8 lautet der Reihentitel

SCHRIFTENREIHE DER INSTITUTE FÜR MATHEMATIK

BEI DER DEUTSCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

und wird herausgegeben von
Prof. Dr. Heinrich Grell, Prof. Dr. Josef Naas, Prof. Dr. Achilles Papapetrou, Prof. Dr. Hans Reichardt, Prof. Dr. Willi Rinow, Prof. Dr. Erhard Schmidt und Prof. Dr. Kurt Schröder

Der Begriff des Raumes in der Geometrie

Bericht von der Riemann-Tagung des Forschungsinstitutes für Mathematik. Mit Beiträgen von 28 Autoren, herausgegeben von Prof. Dr. J. NAAS und Prof. Dr. KURT SCHRÖDER

1957. VIII, 317 Seiten — 22 Abbildungen — 9 Tafeln — gr. 8° — DM 38,— (vergriffen)

Lösung des allgemeinen Randwertproblems für eindimensionale gedämpfte Wellen bei harmonischem Zeitgesetz Von Dr. KARL BORKMANN und SIEGFRIED OBERLÄNDER

1955. 99 Seiten — gr. 8° — DM 12,— (vergriffen)

Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen Von A. W. POGORELOW

(Übersetzung aus dem Russischen)

Wissenschaftliche Redaktion: Prof. Dr. J. NAAS
1956. 79 Seiten — gr. 8° — DM 5,50

Bemerkungen über die Stabilitätsuntersuchungen der Wirbelstraßen

Von Prof. Dr. BL. DOLAPTSCHIEW

1957. 28 Seiten — gr. 8° — DM 3,80

Die Verbiegung konvexer Flächen

Von A. W. POGORELOW

(Übersetzung aus dem Russischen)

Wissenschaftliche Redaktion: Prof. Dr. E. REMBS
1957. 135 Seiten — 26 Abbildungen — gr. 8° — DM 18,50

Einführung in die Theorie stationärer Zufallsfunktionen

Von Prof. A. M. JAGLOM

(Übersetzung aus dem Russischen)

Deutsche Übersetzung unter wissenschaftlicher Redaktion von Dr. HERBERT GOERING

1959. VIII, 177 Seiten — 8 Abbildungen — gr. 8° — DM 24,—

Tabellen von Exponentialfunktionen und -integralen zur Anwendung auf Gebieten der Thermodynamik, Halbleiterttheorie und Gaskinetik

Von SIEGFRIED OBERLÄNDER

1959. VIII, 8 Seiten Text — 142 Tabellenseiten — 1 Abbildung — gr. 8° — Ganzleinen DM 35,— (vergriffen)

Konstruktion ganzer, rationaler und reeller Ordinalzahlen und die diskontinuierliche Struktur der transfiniten reellen Zahlenräume

Von Dr. DIETER KLAUA

1961. 141 Seiten — gr. 8° — DM 28,—

Über eine Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedeutung für die Arithmetik

Von Dr. HERBERT BENZ

1961. 149 Seiten — 5 Abbildungen — gr. 8° — DM 29,50

Qualitative Methoden beim n -Körperproblem der Himmelsmechanik

Von Prof. H. F. CHILMI

(Übersetzung aus dem Russischen; vom Autor durchgesehene und ergänzte Übersetzung. In deutscher Sprache herausgegeben von Dr. J. O. FLECKENSTEIN)

1961. 116 Seiten — 4 Abbildungen — 1 Tabelle — gr. 8° — DM 23,—

Fördern Sie bitte unseren Fachkatalog MATHEMATIK an, der Ihnen kostenlos geliefert wird.

A K A D E M I E - V E R L A G - B E R L I N

Die angenäherte Berechnung der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion

VON ANDREI RIPIANU

In dieser Arbeit wird versucht, eine Methode zu finden, mit der die Genauigkeit der Näherungswerte der Fourierkoeffizienten, die man bei der Unterteilung der Periode in s gleiche Teile mittels eines der bekannten Rechenverfahren erhält, gesteigert werden kann. Zu diesem Zwecke suchen wir nach mathematischen Beziehungen zwischen den Näherungswerten der Fourierkoeffizienten im Falle der Unterteilung der Periode in s gleiche Teile und im Falle ihrer Unterteilung in ks gleiche Teile, wobei k eine positive ganze Zahl ist. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall $k = p^n$ behandelt.

An attempt is made at finding a method that would allow to increase the accuracy of the approximate values of Fourier coefficients obtained by means of one of the well-known methods of calculation when the period is divided in s equal parts. To this end, mathematical relations are looked for that connect the approximate values of Fourier coefficients pertaining to a division of the period in s and ks equal parts, respectively, k being a positive integer. In the present paper, the case $k = p^n$ is discussed.

В работе ищется метод для нахождения более точных приближённых значений коэффициентов Фурье, которые получаются известными методами разбиения периода на s равных частей. Для этой цели устанавливаются соотношения между приближёнными значениями коэффициентов Фурье в случае разбиения периода на s равных частей и в случае разбиения на ks равных частей, k — натуральное число. В работе рассматривается случай $k = p^n$.

Man betrachtet die periodische Funktion $\varphi(u)$. Man kann annehmen, daß die Periode gleich 2π ist, da man dies immer durch einen passenden Wechsel der Veränderlichen verwirklichen kann.

Die Entwicklung in eine FOURIER-Reihe lautet

$$\varphi(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos v u + b_v \sin v u)$$

mit

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u) \cos v u \, du, \quad b_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u) \sin v u \, du, \quad v = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Mit der angenäherten Quadraturformel:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta(u) \, du \approx \frac{2}{s} \sum_{j=1}^s \theta(j\alpha) \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{s} \right)$$

erhält man:

$$a_v \approx \left(a_v \right)_s = \frac{2}{s} \sum_{j=1}^s \varphi(j\alpha) \cos v j \alpha, \quad b_v \approx \left(b_v \right)_s = \frac{2}{s} \sum_{j=1}^s \varphi(j\alpha) \sin v j \alpha \quad \dots (1).$$

Wir definieren:

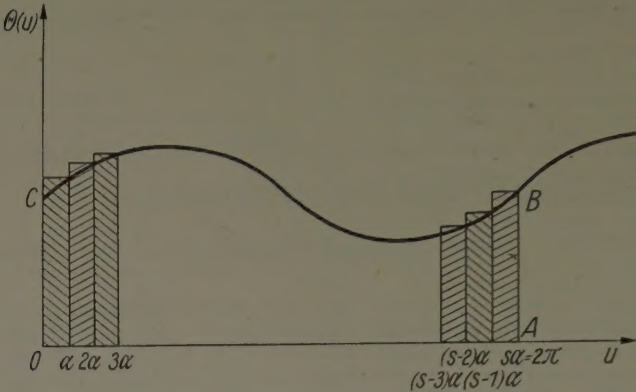
$$\left(a_v \right)_s^{(\beta)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{s} \sum_{j=1}^s \varphi(j\alpha + \beta) \cos v j \alpha, \quad \left(b_v \right)_s^{(\beta)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{s} \sum_{j=1}^s \varphi(j\alpha + \beta) \sin v j \alpha \quad \dots (2).$$

Wir nehmen uns vor, $\left(a_v \right)_{p^n s}$ und $\left(b_v \right)_{p^n s}$ als Funktion von $\left(a_v \right)_s^{(\beta)}$ und $\left(b_v \right)_s^{(\beta)}$ auszudrücken. p bezeichnet eine ganze positive Zahl, während β eine Verschiebung des Integrationsbereiches $(0, 2\pi)$ entlang der $O u$ -Achse bezeichnet, die wir später festlegen werden (siehe Bild).

Man bemerkt, daß die Zahlen $p j + \sigma$ mit $\sigma = 0, 1, 2, \dots, p-1$ und $j = 1, 2, \dots, p_s^{n-1}$ gleich den Zahlen $p, p+1, \dots, p^n s, p^n s+1, \dots, p^n s+p-1$ sind.

Es sei

$$\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{p^n s} \dots \dots \dots (3).$$



Man hat dann

$$(p^n s + \sigma) \alpha_n = 2\pi + \sigma \alpha_n \quad (\sigma = 1, 2, \dots, p-1)$$

und, weil

$$\varphi(u) = \varphi(2\pi + u)$$

ist,

$$\varphi[(p^n s + \sigma) \alpha_n] = \varphi(\sigma \alpha_n) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, p-1) \dots \dots \dots (4).$$

Aus (2) und (4) folgt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_v}{p^m s} \right)^{(\beta)} &= \frac{2}{p^m s} \left\{ \sum_{j=1}^{p^{m-1}s} \varphi(p j \alpha_m + \beta) \cos v p j \alpha_m \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{p^{m-1}s} \varphi[(p j + \sigma) \alpha_m + \beta] \cos v (p j + \sigma) \alpha_m \right\}, \end{aligned}$$

aus (3):

$$p \alpha_m = \alpha_{m-1}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_v}{p^m s} \right)^{(\beta)} &= \frac{1}{p} \left[\frac{2}{p^{m-1}s} \sum_{j=1}^{p^{m-1}s} \varphi(j \alpha_{m-1} + \beta) \cos v j \alpha_{m-1} \right. \\ &\quad + \frac{2}{p^{m-1}s} \sum_{\sigma=1}^{p-1} \cos v \sigma \alpha_m \sum_{j=1}^{p^{m-1}s} \varphi(j \alpha_{m-1} + \sigma \alpha_m + \beta) \cos v j \alpha_{m-1} \\ &\quad \left. - \frac{2}{p^{m-1}s} \sum_{\sigma=1}^{p-1} \sin v \sigma \alpha_m \sum_{j=1}^{p^{m-1}s} \varphi(j \alpha_{m-1} + \sigma \alpha_m + \beta) \sin v j \alpha_{m-1} \right]. \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen (2) ist

$$\left(\frac{a_v}{p^m s} \right)^{(\beta)} = \frac{1}{p} \left\{ \left(\frac{a_v}{p^{m-1}s} \right)^{(\beta)} + \sum_{\sigma=1}^{p-1} \left[\left(\frac{a_v}{p^{m-1}s} \right)^{(\sigma \alpha_m + \beta)} \cos v \sigma \alpha_m - \left(\frac{b_v}{p^{m-1}s} \right)^{(\sigma \alpha_m + \beta)} \sin v \sigma \alpha_m \right] \right\} \quad (5a),$$

ähnlich

$$\left(\frac{b_v}{p^m s} \right)^{(\beta)} = \frac{1}{p} \left\{ \left(\frac{b_v}{p^{m-1}s} \right)^{(\beta)} + \sum_{\sigma=1}^{p-1} \left[\left(\frac{b_v}{p^{m-1}s} \right)^{(\sigma \alpha_m + \beta)} \cos v \sigma \alpha_m + \left(\frac{a_v}{p^{m-1}s} \right)^{(\sigma \alpha_m + \beta)} \sin v \sigma \alpha_m \right] \right\} \quad (5b).$$

Mit einer positiven ganzen Zahl m sei

$$T_m(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{a_v}{p^m s} \right)^{(\beta)} \cos v \beta - \left(\frac{b_v}{p^m s} \right) \sin v \beta \dots \dots \dots (6).$$

Dann erhält man aus (5)

$$\begin{aligned}
 T_m(\bar{\sigma} \alpha_q) &= \left(\frac{a_p}{p^m s} \right)^{(\bar{\sigma} \alpha_q)} \cos \nu \bar{\sigma} \alpha_q - \left(\frac{b_p}{p^m s} \right)^{(\bar{\sigma} \alpha_q)} \sin \nu \bar{\sigma} \alpha_q \\
 &= \frac{1}{p} \left\{ \left(\frac{a_p}{p^{m-1} s} \right)^{(\bar{\sigma} \alpha_q)} \cos \nu \bar{\sigma} \alpha_q + \sum_{\sigma=1}^{p-1} \left[\left(\frac{a_p}{p^{m-1} s} \right)^{(\sigma \alpha_m + \bar{\sigma} \alpha_q)} \cos \nu \sigma \alpha_m \cos \nu \bar{\sigma} \alpha_q \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{b_p}{p^{m-1} s} \right)^{(\sigma \alpha_m + \bar{\sigma} \alpha_q)} \sin \nu \sigma \alpha_m \cos \nu \bar{\sigma} \alpha_q \right] - \left(\frac{b_p}{p^{m-1} s} \right)^{(\bar{\sigma} \alpha_q)} \sin \nu \bar{\sigma} \alpha_q \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\sigma=1}^{p-1} \left[\left(\frac{b_p}{p^{m-1} s} \right)^{(\sigma \alpha_m + \bar{\sigma} \alpha_q)} \cos \nu \sigma \alpha_m \sin \nu \bar{\sigma} \alpha_q + \left(\frac{a_p}{p^{m-1} s} \right)^{(\sigma \alpha_m + \bar{\sigma} \alpha_q)} \sin \nu \sigma \alpha_m \sin \nu \bar{\sigma} \alpha_q \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{p} \left\{ \left(\frac{a_p}{p^{m-1} s} \right)^{(\bar{\sigma} \alpha_q)} \cos \nu \bar{\sigma} \alpha_q - \left(\frac{b_p}{p^{m-1} s} \right)^{(\bar{\sigma} \alpha_q)} \sin \nu \bar{\sigma} \alpha_q \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\sigma=1}^{p-1} \left[\left(\frac{a_p}{p^{m-1} s} \right)^{(\sigma \alpha_m + \bar{\sigma} \alpha_q)} \cos \nu (\sigma \alpha_m + \bar{\sigma} \alpha_q) - \left(\frac{b_p}{p^{m-1} s} \right)^{(\sigma \alpha_m + \bar{\sigma} \alpha_q)} \sin \nu (\sigma \alpha_m + \bar{\sigma} \alpha_q) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung (6) ist

$$T_m(\bar{\sigma} \alpha_q) = \frac{1}{p} \left[T_{m-1}(\bar{\sigma} \alpha_q) + \sum_{\sigma=1}^{p-1} T_{m-1}(\sigma \alpha_m + \bar{\sigma} \alpha_q) \right] \dots \dots \dots (7).$$

Mit Hilfe von (7) findet man

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a_p}{p^n s} \right) &= \frac{1}{p} \left(\frac{a_p}{p^{n-1} s} \right) + \frac{1}{p^l} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_{n-l}(\sigma_1 \alpha_n) \\
 &\quad + \frac{1}{p^l} \sum_{r=1}^{l-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, l\}}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \dots \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} T_{n-l}(\sigma_1 \alpha_n + \\
 &\quad + \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{n-i_2+1} + \dots + \sigma_{i_r} \alpha_{n-i_r+1}) \dots \dots \dots (8),
 \end{aligned}$$

wo l ($2 \leq l \leq n$) eine ganze und positive Zahl bedeutet. Die Bezeichnung $(i_1, i_2, \dots, i_r) \in \{2, 3, \dots, l\}$ bedeutet, daß die Indizes $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ die $\binom{l-1}{r}$ Kombinationen von r Indizes, die man mit den Zahlen $2, 3, \dots, l$ bilden kann, durchläuft.

Um die Formel (8) zu beweisen nimmt man an, daß sie für $l = \bar{l}$ befriedigt ist. Man ersetzt l durch \bar{l} in (8) und man formt die Ausdrücke T_{n-l} mit Hilfe von (7) um. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a_p}{p^n s} \right) &= \frac{1}{p} \left(\frac{a_p}{p^{n-1} s} \right) + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n) + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{\bar{l}+1}=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_{\bar{l}+1} \alpha_{n-\bar{l}} + \sigma_1 \alpha_n) \\
 &\quad + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{r=1}^{\bar{l}-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \bar{l}\}}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \dots \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n + \\
 &\quad + \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{n-i_2+1} + \dots + \sigma_{i_r} \alpha_{n-i_r+1}) \\
 &\quad + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{r=1}^{\bar{l}-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \bar{l}\}}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \dots \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{\bar{l}+1}=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_{\bar{l}+1} \alpha_{n-\bar{l}} + \\
 &\quad + \sigma_1 \alpha_n + \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{n-i_2+1} + \dots + \sigma_{i_r} \alpha_{n-i_r+1}) \dots \dots \dots (9).
 \end{aligned}$$

Man wird weiter die symbolische Gleichung:

$$\begin{aligned}
 (i_1, i_2, \dots, i_r) &\in \{2, 3, \dots, \bar{l} + 1\} \\
 &= \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \in \{2, 3, \dots, \bar{l}\} + \{i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, \bar{l} + 1\} \in \{2, 3, \dots, \bar{l}\} \dots \dots (10)
 \end{aligned}$$

benützen. Mit dem letzten Glied werden die Kombinationen von r Indices bezeichnet, die man bekommt, wenn einer von ihnen den Wert $\bar{l} + 1$ annimmt und die Kombination $\{i_1, i_2, \dots, i_{r-1}\}$ die $\binom{\bar{l}-1}{r-1}$ Kombination von $r-1$ Indizes durchläuft, die man mit den Zahlen $2, 3, \dots, \bar{l}$

bilden kann. Dabei ist $r \geq 2$ vorausgesetzt worden. Man ersetzt in (8) l durch $\bar{l} + 1$ und bekommt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_v}{p^n s} \right) &= \frac{1}{p} \left(\frac{a_v}{p^{n-1} s} \right) + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n) \\ &+ \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{r=1}^{\bar{l}} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \bar{l}+1\}}} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_3}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n + \\ &+ \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{n-i_2+1} + \dots + \sigma_{i_r} \alpha_{n-i_r+1}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (10):

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_v}{p^n s} \right) &= \frac{1}{p} \left(\frac{a_v}{p^{n-1} s} \right) + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n) + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{i_1=2}^{\bar{l}+1} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n + \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1}) \\ &+ \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{r=2}^{\bar{l}} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \bar{l}\}}} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_3}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n + \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{n-i_2+1} + \dots \\ &+ \sigma_{i_r} \alpha_{n-i_r+1}) + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{r=2}^{\bar{l}} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, \bar{l}+1) \\ \in \{2, 3, \dots, \bar{l}\}}} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_3}=1}^{p-1} \dots \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n + \\ &+ \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{n-i_2+1} + \dots + \sigma_{i_r} \alpha_{n-i_r+1}). \end{aligned}$$

Wenn man $r = \varrho + 1$ setzt, wird die vorige Gleichung zu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_v}{p^n s} \right) &= \frac{1}{p} \left(\frac{a_v}{p^{n-1} s} \right) + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n) + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{\bar{l}+1}=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n + \sigma_{\bar{l}+1} \alpha_{n-\bar{l}}) \\ &+ \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{r=1}^{\bar{l}-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \bar{l}\}}} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_3}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} \dots T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n + \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{n-i_2+1} + \\ &+ \dots + \sigma_{i_r} \alpha_{n-i_r+1}) + \frac{1}{p^{\bar{l}+1}} \sum_{\varrho=1}^{\bar{l}-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_{\varrho}, \bar{l}+1) \\ \in \{2, 3, \dots, \bar{l}\}}} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_3}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_{\varrho}}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{\bar{l}+1}=1}^{p-1} T_{n-\bar{l}-1}(\sigma_1 \alpha_n + \\ &+ \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \dots + \sigma_{i_{\varrho}} \alpha_{n-i_{\varrho}+1} + \sigma_{\bar{l}+1} \alpha_{n-\bar{l}}). \end{aligned}$$

Wir haben die Gleichung (9) bekommen. Wenn die Gleichung (8) für $l = \bar{l}$ richtig ist, ist sie also auch richtig für $l = \bar{l} + 1$.

Für $l = 2$ wird (8) zu

$$\left(\frac{a_v}{p^n s} \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{a_v}{p^{n-1} s} \right) + \frac{1}{p^2} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_{n-2}(\sigma_1 \alpha_n) + \frac{1}{p^2} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} \sum_{\sigma_2=1}^{p-1} T_{n-2}(\sigma_1 \alpha_n + \sigma_2 \alpha_{n-1}).$$

Aus (5) ergibt sich für $\beta = 0$ und $m = n$ mit den Bezeichnungen (6) und mit Hilfe von (7)

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_v}{p^n s} \right) &= \frac{1}{p} \left(\frac{a_v}{p^{n-1} s} \right) + \frac{1}{p} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_{n-1}(\sigma_1 \alpha_n) = \frac{1}{p} \left(\frac{a_v}{p^{n-1} s} \right) + \frac{1}{p^2} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_{n-2}(\sigma_1 \alpha_n) \\ &+ \frac{1}{p^2} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} \sum_{\sigma_2=1}^{p-1} T_{n-2}(\sigma_1 \alpha_n + \sigma_2 \alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

Damit ist die Richtigkeit der Gleichung (8) bewiesen.

Wenn man in (8) $l = n$ einführt, bekommt man:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_v}{p^n s} \right) &= \frac{1}{p} \left(\frac{a_v}{p^{n-1} s} \right) + \frac{1}{p^n} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_0(\sigma_1 \alpha_n) + \frac{1}{p^n} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, n\}}} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_3}=1}^{p-1} \dots \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} T_0(\sigma_1 \alpha_n + \\ &+ \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{n-i_2+1} + \dots + \sigma_{i_r} \alpha_{n-i_r+1}) \dots \dots \dots (11). \end{aligned}$$

Aus (6):

$$T_0(\beta) = \begin{pmatrix} a_v \\ s \end{pmatrix}^{(\beta)} \cos \nu \beta - \begin{pmatrix} b_v \\ s \end{pmatrix}^{(\beta)} \sin \nu \beta \dots \dots \dots (12).$$

Wir bezeichnen:

$$\theta_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p^n} \left[\sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_0(\sigma_1 \alpha_n) + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, n\}}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \dots \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} T_0(\sigma_1 \alpha_n + \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{n-i_2+1} + \dots + \sigma_{i_r} \alpha_{n-i_r+1}) \right] \dots \dots \dots (13).$$

Damit geht (11) über in

$$\left(\frac{a_p}{p^n s} \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{a_p}{p^{n-1} s} \right) + \theta_n \dots \dots \dots (14),$$

und wir erhalten endgültig

$$\left(\frac{a_p}{p^n s} \right) = \frac{1}{p^n} \left[\left(\frac{a_p}{s} \right) + \sum_{\sigma=1}^n p^\sigma \theta_\sigma \right] \dots \dots \dots (15).$$

Für $n = 1$ hat der Ausdruck (13) für θ_n keinen Sinn mehr. Um θ_1 zu finden, führen wir in (5) $n = 1$ und $\beta = 0$ ein. Mit der Bezeichnung (12) erhält man

$$\left(\frac{a_p}{p s} \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{a_p}{s} \right) + \frac{1}{p} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_0(\sigma_1 \alpha_1).$$

Daraus und mit Hilfe von (14) bekommt man

$$\theta_1 = \frac{1}{p} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_0(\sigma_1 \alpha_1).$$

Die Gleichung (15) ergibt den gesuchten Ausdruck von $\left(\frac{a_p}{p^n s} \right)^{(\beta)}$ als Funktion von $\left(\frac{a_p}{s} \right)^{(\beta)}$; $\left(\frac{b_p}{s} \right)^{(\beta)}$, wobei β die durch (13) und (15) gegebenen Werte annimmt.

In ähnlicher Weise beweist man

$$\left(\frac{b_p}{p^n s} \right) = \frac{1}{p^n} \left[\left(\frac{b_p}{s} \right) + \sum_{\sigma=1}^n p^\sigma \sigma_\sigma \right] \dots \dots \dots (16),$$

wo

$$\sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p^n} \left[\sum_{\sigma_1=1}^{p-1} S_0(\sigma_1 \alpha_n) + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, n\}}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \dots \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} S_0(\sigma_1 \alpha_n + \sigma_{i_1} \alpha_{n-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{n-i_2+1} + \dots + \sigma_{i_r} \alpha_{n-i_r+1}) \right] \dots \dots \dots (17).$$

(Für $n = 1$ verschwindet das Glied von σ_n , das die vielfachen Summen enthält.) Außerdem ist

$$S_0(\beta) = \left(\frac{b_p}{s} \right)^{(\beta)} \cos \nu \beta + \left(\frac{a_p}{s} \right)^{(\beta)} \sin \nu \beta \dots \dots \dots (18).$$

Wir werden jetzt noch andere Ausdrücke für $\left(\frac{a_p}{p^n s} \right)$ und $\left(\frac{b_p}{p^n s} \right)$ aus (15) und (16) herleiten.

Wir betrachten die Größen $a_{\lambda_1}; a_{\lambda_1, \lambda_2}; \dots; a_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$, wo die Indexkombinationen $(\lambda_1), (\lambda_1, \lambda_2), \dots, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ die $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ Kombinationen von $1, 2, \dots, n$ Indices durchlaufen, die man mit den Zahlen $1, 2, \dots, n$ bilden kann. Die Größen $a_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ haben definitionsgemäß die Eigenschaft, daß sie sich nicht ändern, wenn bei ihnen die Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vertauscht werden. Man hat

$$\sum_{\sigma=1}^n \left(a_\sigma + \sum_{r=1}^{\sigma-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \sigma\}}} a_{\sigma, \sigma-i_1+1, \sigma-i_2+1, \dots, \sigma-i_r+1} \right) = \sum_{\varphi=1}^n \sum_{\substack{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\varphi) \\ \in \{1, 2, \dots, n\}}} a_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\varphi} \dots \dots \dots (19).$$

Für $\sigma = 1$ wird das Glied

$$\sum_{r=1}^{\sigma-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \sigma\}}} a_{\sigma, \sigma-i_1+1, \sigma-i_2+1, \dots, \sigma-i_r+1}$$

aus (19) weggelassen. Um Gleichung (19) zu beweisen, bezeichnet man das erste Glied mit D :

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma} + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\sigma=r+1}^n \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \sigma\}}} a_{\sigma, \sigma-i_1+1, \sigma-i_2+1, \dots, \sigma-i_r+1}.$$

Die Summe

$$\sum_{\sigma=r+1}^n \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \sigma\}}} a_{\sigma, \sigma-i_1+1, \sigma-i_2+1, \dots, \sigma-i_r+1} \quad \dots \quad (20)$$

hat

$$\sum_{\sigma=r+1}^n \binom{\sigma-1}{r} = \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r+1}$$

Glieder.

Wenn $\sigma_1 < \sigma_2$ ist, unterscheidet sich die Indexkombination $(\sigma_1, \sigma_1-i_1+1, \dots, \sigma_1-i_r+1)$ von der Kombination $(\sigma_2, \sigma_2-j_1+1, \sigma_2-j_2+1, \dots, \sigma_2-j_r+1)$; hier sind (i_1, i_2, \dots, i_r) und (j_1, j_2, \dots, j_r) zwei mit den Indices $2, 3, \dots, \sigma_1$ und $2, 3, \dots, \sigma_2$ gebildete Kombinationen. In der Tat sind die Indices $\sigma_1, \sigma_1-i_1+1, \dots, \sigma_1-i_r+1$ alle kleiner als σ_2 . Wenn die mit den Indices $2, 3, \dots$ gebildeten Kombinationen (i_1, i_2, \dots, i_r) und (j_1, j_2, \dots, j_r) verschieden sind, sind $(\sigma, \sigma-i_1+1, \dots, \sigma-i_r+1)$ und $(\sigma, \sigma-j_1+1, \dots, \sigma-j_r+1)$ auch verschieden. Also ergeben, da die Glieder der Summe (20) aus $\binom{n}{r+1}$ untereinander verschiedenen Kombinationen von $r+1$ Indices bestehen, die den Zahlen $1, 2, \dots, n$ entnommen sind, alle Kombinationen, die aus $r+1$ den Zahlen $1, 2, \dots, n$ entnommenen Indices gebildet werden, die Summe

$$\sum_{\substack{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}) \\ \in \{1, 2, \dots, n\}}} a_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}}.$$

Mit $\varphi = r+1$ erhält man

$$D = \sum_{\lambda_1 \in \{1, 2, \dots, n\}} a_{\lambda_1} + \sum_{\varphi=2}^n \sum_{\substack{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\varphi}) \\ \in \{1, 2, \dots, n\}}} a_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\varphi}} = E,$$

wo E das zweite Glied der Gleichung (19) bezeichnet. Damit ist die Gleichung (19) bewiesen. Wenn man den Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\varphi}$ Werte aus der Reihe der Zahlen $1, 2, \dots, n$ gibt, ist der Ausdruck:

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\varphi}} = \sum_{\mu_1=1}^{p-1} \sum_{\mu_2=1}^{p-1} \dots \sum_{\mu_p=1}^{p-1} T_0(\mu_1 \alpha_{\lambda_1} + \mu_2 \alpha_{\lambda_2} + \dots + \mu_{\varphi} \alpha_{\lambda_{\varphi}}) \quad \dots \quad (21)$$

eindeutig bestimmt, und $a_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\varphi}}$ verändert sich nicht, wenn die Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\varphi}$ untereinander vertauscht werden. $T_0(\beta)$ ist durch (12) bestimmt.

Wir setzen jetzt

$$A^{(j \alpha_q)} = \binom{a_p}{s}^{(j \alpha_q)} \cos p j \alpha_q - \binom{b_p}{s}^{(j \alpha_q)} \sin p j \alpha_q \quad \dots \quad (12a),$$

$$B^{(j \alpha_q)} = \binom{b_p}{s}^{(j \alpha_q)} \cos p j \alpha_q + \binom{a_p}{s}^{(j \alpha_q)} \sin p j \alpha_q \quad \dots \quad (12b).$$

Dann ist aus (12) und (12a) zu ersehen, daß $A^{(j \alpha_q)} = T_0(j \alpha_q)$ ist, und es folgt:

$$A^{(\mu_1 \alpha_{\lambda_1} + \dots + \mu_{\varphi} \alpha_{\lambda_{\varphi}})} = T_0(\mu_1 \alpha_{\lambda_1} + \dots + \mu_{\varphi} \alpha_{\lambda_{\varphi}}) \quad \dots \quad (22).$$

Aus (13) und (15) erhält man, wenn man σ durch θ ersetzt

$$\begin{aligned} \binom{a_p}{p^n s} = \frac{1}{p^n} & \left[\binom{a_p}{s} + \sum_{\theta=1}^n \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} T_0(\sigma_1 \alpha_{\theta}) + \sum_{\theta=1}^n \sum_{r=1}^{\theta-1} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \theta\}}} \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{i_2}=1}^{p-1} \dots \sum_{\sigma_{i_r}=1}^{p-1} (T_0 \sigma_1 \alpha_{\theta} + \right. \\ & \left. + \sigma_{i_1} \alpha_{\theta-i_1+1} + \sigma_{i_2} \alpha_{\theta-i_2+1} + \dots + \sigma_{i_r} \alpha_{\theta-i_r+1}) \right]. \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen (21) und mit $\mu_1 = \sigma_1, \mu_2 = \sigma_{i_1}, \dots, \mu_{r+1} = \sigma_{i_r}$ ist

$$\binom{a_v}{p^n s} = \frac{1}{p^n} \left[\binom{a_v}{s} + \sum_{\theta=1}^n \left(a_\theta + \sum_{\substack{r=1 \\ (i_1, i_2, \dots, i_r) \\ \in \{2, 3, \dots, \theta\}}}^{\theta-1} a_{\theta, \theta-i_1+1, \theta-i_2+1, \dots, \theta-i_r+1} \right) \right].$$

Mit Hilfe von (19) und (22) und mit $\sigma = \theta$ ergibt sich

$$\binom{a_v}{p^n s} = \frac{1}{p^n} \left[\binom{a_v}{s} + \sum_{\varphi=1}^n \sum_{\substack{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\varphi) \\ \in \{2, 3, \dots, n\}}} \sum_{\mu_1=1}^{p-1} \sum_{\mu_2=1}^{p-1} \dots \sum_{\mu_\varphi=1}^{p-1} A^{(\mu_1 \alpha_{\lambda_1} + \dots + \mu_\varphi \alpha_{\lambda_\varphi})} \right].$$

Ersetzt man $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\varphi$ durch $\sigma_{\lambda_1}, \sigma_{\lambda_2}, \dots, \sigma_{\lambda_\varphi}$, so bekommt man

$$\binom{a_v}{p^n s} = \frac{1}{p^n} \left[\binom{a_v}{s} + \sum_{\varphi=1}^n \sum_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\varphi)_n} \sum_{\sigma_{\lambda_1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{\lambda_\varphi}=1}^{p-1} A^{(\sigma_{\lambda_1} \alpha_{\lambda_1} + \dots + \sigma_{\lambda_\varphi} \alpha_{\lambda_\varphi})} \right].$$

Auf gleiche Weise kann man die Ausdrücke für $\binom{a_0}{p^n s}$ und $\binom{b_v}{p^n s}$ finden. Man findet schließlich:

$$\left. \begin{aligned} \binom{a_0}{p^n s} &= \frac{1}{p} \left[\binom{a_0}{p^{n-1} s} + \sum_{\sigma=1}^{p-1} \binom{a_0}{p^{n-1} s}^{(\sigma \alpha_n)} \right], \\ \binom{a_v}{p^n s} &= \frac{1}{p^n} \left[\binom{a_v}{s} + \sum_{\varphi=1}^n \sum_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\varphi)_n} \sum_{\sigma_{\lambda_1}, \sigma_{\lambda_2}, \dots, \sigma_{\lambda_\varphi}=1}^{p-1} A^{(\sigma_{\lambda_1} \alpha_{\lambda_1} + \sigma_{\lambda_2} \alpha_{\lambda_2} + \dots + \sigma_{\lambda_\varphi} \alpha_{\lambda_\varphi})} \right], \\ \binom{b_v}{p^n s} &= \frac{1}{p^n} \left[\binom{b_v}{s} + \sum_{\varphi=1}^n \sum_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\varphi)_n} \sum_{\sigma_{\lambda_1}, \sigma_{\lambda_2}, \dots, \sigma_{\lambda_\varphi}=1}^{p-1} B^{(\sigma_{\lambda_1} \alpha_{\lambda_1} + \sigma_{\lambda_2} \alpha_{\lambda_2} + \dots + \sigma_{\lambda_\varphi} \alpha_{\lambda_\varphi})} \right] \end{aligned} \right\} \dots (23).$$

In diesen Gleichungen sind A und B durch die Ausdrücke (12a) und (12b) gegeben.

Für $n = 3$ bedeuten die Gleichungen (23) beispielsweise

$$\begin{aligned} \binom{a_v}{p^3 s} &= \frac{1}{p^3} \left[\binom{a_v}{s} + \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} A^{(\sigma_1 \alpha_1)} + \sum_{\sigma_2=1}^{p-1} A^{(\sigma_2 \alpha_2)} + \sum_{\sigma_3=1}^{p-1} A^{(\sigma_3 \alpha_3)} + \sum_{\sigma_1, \sigma_2=1}^{p-1} A^{(\sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma_2, \sigma_3=1}^{p-1} A^{(\sigma_2 \alpha_2 + \sigma_3 \alpha_3)} + \sum_{\sigma_3, \sigma_1=1}^{p-1} A^{(\sigma_3 \alpha_3 + \sigma_1 \alpha_1)} + \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=1}^{p-1} A^{(\sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2 + \sigma_3 \alpha_3)} \right], \\ \binom{b_v}{p^3 s} &= \frac{1}{p^3} \left[\binom{b_v}{s} + \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} B^{(\sigma_1 \alpha_1)} + \sum_{\sigma_2=1}^{p-1} B^{(\sigma_2 \alpha_2)} + \sum_{\sigma_3=1}^{p-1} B^{(\sigma_3 \alpha_3)} + \sum_{\sigma_1, \sigma_2=1}^{p-1} B^{(\sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma_2, \sigma_3=1}^{p-1} B^{(\sigma_2 \alpha_2 + \sigma_3 \alpha_3)} + \sum_{\sigma_3, \sigma_1=1}^{p-1} B^{(\sigma_3 \alpha_3 + \sigma_1 \alpha_1)} + \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=1}^{p-1} B^{(\sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2 + \sigma_3 \alpha_3)} \right]. \end{aligned}$$

Der Gleichung (3) entnimmt man:

$$\alpha_\lambda = \frac{2\pi}{p^\lambda s}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\pi}{p^\mu s}, \quad \alpha^\lambda = p^{\mu-\lambda} \alpha^\mu \quad (\lambda < \mu) \quad \dots \dots \dots (24).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man die Werte von $\alpha_{\lambda_1}, \alpha_{\lambda_2}, \dots, \alpha_{\lambda_\varphi}$ aus (23) als Funktion der kleinsten von ihnen, derjenigen also, die den größten Index besitzt, ausdrücken.

Auf Grund der Formeln (23) kann man die Näherungswerte der Koeffizienten $\binom{a_0}{p^n s}$, $\binom{a_v}{p^n s}$, $\binom{b_v}{p^n s}$ bestimmen, die einer Einteilung des Periodenintervalls in $p^n s$ gleiche Teile entsprechen, wenn man die Werte der Koeffizienten $\binom{a_0}{s}$, $\binom{a_v}{s}$, $\binom{b_v}{s}$ kennt, die zu einer Einteilung des Periodenintervalls in s gleiche Teile gehören und man von verschiedenen wohlbestimmten Anfangspunkten O auf der Abszissenachse $O u$ ausgeht.

Die Bestimmung der Koeffizienten $\binom{a_0}{s}$, $\binom{a_v}{s}$, $\binom{b_v}{s}$ für $s = 24$ gleiche Teile kann mit den Tabellen von ZIPPERER durchgeführt werden.

Je größer die Zahl der Teile $p^n s$ ist, desto genauer sind die Werte, die man für die Koeffizienten $\binom{a_0}{p^n s}$, $\binom{a_v}{p^n s}$, $\binom{b_v}{p^n s}$ mit den Formeln (23) erhält.

Die Vorteile der Methode der Bestimmung der angenäherten Werte der FOURIER-Koeffizienten, die in vorliegender Arbeit beschrieben ist, sind die folgenden:

Die Berechnung der Werte der Koeffizienten der FOURIER-Reihe mit den vorhandenen Rechnungsschemen (RUNGE, ZIPPERER) benötigt sehr ausgedehnte Rechnungen, wenn eine größere Genauigkeit für die Werte der Koeffizienten verlangt wird und zu diesem Zwecke die Periode in eine größere Zahl gleicher Teile geteilt wird.

Mit Hilfe der Gleichungen (23) kann man jetzt aber die Werte der FOURIER-Koeffizienten mit einer großen Genauigkeit erhalten, wenn man von den nur ungenauen Näherungswerten dieser Koeffizienten ausgeht, die man sehr schnell und einfach erhält, wenn man eins der vorhandenen Rechnungsschemen (RUNGE, ZIPPERER), für eine Einteilung der Periode in eine kleine Zahl gleicher Teile anwendet.

Die Gleichungen (23) ermöglichen die Berechnung der angenäherten Werte der Koeffizienten der FOURIER-Reihe für eine viel größere Skala der Teilzahlen der Periode als die gewöhnlichen Rechnungsschemen (RUNGE, ZIPPERER), die für einen bestimmten Wert der Teilzahlen ausgearbeitet sind.

Diese Gleichungen ermöglichen sogar die Berechnung von Näherungswerten für die FOURIER-Koeffizienten mit einem beliebigen Annäherungsgrad.

Der Weg den man einzuschlagen hat, um die FOURIER-Koeffizienten a_0, a_ν, b_ν einer periodischen Funktion mit Hilfe der Gleichungen (23) zu berechnen, ist demnach der folgende:

Man wählt die Zahl s der gleichen Teile, in die man die Periode zerlegt so, daß man schnell und einfach die genäherten Werte der Koeffizienten a_0, a_ν, b_ν mit den Schablonen von ZIPPERER oder mit den Tabellen von RUNGE rechnen kann. Danach wählt man die Werte von p und n gemäß der gewünschten feineren Unterteilung der Periode in $p^n s$ gleiche Teile und rechnet die Werte der Koeffizienten $\left(\frac{a_0}{p^n s}\right), \left(\frac{a_\nu}{p^n s}\right), \left(\frac{b_\nu}{p^n s}\right)$ mit Hilfe der Gleichungen (23) aus. Dazu werden

die Werte von α_λ mit Hilfe der Gleichungen (24) und für jedes α_λ und für den angenommenen Wert von s die Näherungswerte der Koeffizienten a_0, a_λ, b_ν für den Fall bestimmt, daß man der Periode 0 bis 2π eine durch die Gleichung (24) für α_λ bestimmte Translation entlang der Abszissenachse Ou erteilt. Die gefundenen Werte von α_λ und der Koeffizienten a_0, a_ν, b_ν setzt man in die Gleichungen (23) ein und erhält die genaueren Werte dieser Koeffizienten a_0, a_ν, b_ν für eine Zerlegung der Periode in $p^n s$ gleiche Teile.

Man kann auf diese Weise die Koeffizienten der FOURIER-Reihe einer periodischen Funktion für jede Ordnungszahl ν berechnen.

Bei der Rechnung kann man die Endgleichungen sowohl in der Form (23), wie auch in der Form (15) und (16) verwenden.

Literatur

- [1] G. SCOTTO LAVINA, Sul calcolo dei coefficienti approssimati nell'analisi armonico delle funzioni periodiche, *Rivista di Ingegneria* Nr. 10 (1952).
- [2] ZIPPERER, Schwingungslehre (Götschen, Band 953 und 961/961a), Berlin 1955, Verlag Walter de Gruyter.

Manuskripteingang: 2. 11. 1960

Anschrift: ANDREI RIPIANU, Str. N. Iorga 4, Cluj, Rumänien

Large Strain Creep of Rotating Cylinders^{*)}

By F. P. J. RIMROTT and J. R. LUKE

In der vorliegenden Abhandlung werden Gleichungen für die Kriechgeschwindigkeiten, die Kriechdehnungen und die Spannungen in rotierenden runden Hohlzylindern aus isotropem und homogenem Werkstoff unter folgenden Annahmen hergeleitet: 1. Die Wichte des Werkstoffes bleibt unverändert. 2. Die Verhältnisse der Hauptschubspannungen zu den entsprechenden Hauptschubdehnungsgeschwindigkeiten sind untereinander gleich. 3. Die Vergleichsdehnungsgeschwindigkeit ist eine Funktion der Vergleichsspannung. Um das Verhalten des Zylinders auch bei größeren Verformungen zu erfassen, wird ein logarithmisches Dehnungsgesetz verwendet. Auf diese Weise kann die Zeit bis zum Versagen des Zylinders berechnet werden. Den Gleichungen liegt das Kriechgesetz $\dot{\epsilon} = B \sigma^n$ zugrunde.

Using the generally accepted assumptions of constant density, of equality of the ratios of principal shear stresses to the corresponding principal shear strain rates, and of existence of a relation between the significant strain rate and the significant stress, equations are developed for the strain rates, strains, and stresses of a rotating hollow cylinder made of an isotropic and homogeneous material which is subject to creep. The strains are considered large, requiring the use of finite-strain theory. The application of the finite-strain theory also permits the prediction of the time at which the cylinder will fail. The creep law $\dot{\epsilon} = B \sigma^n$ is used in the derivation of the equations.

В статье выводятся уравнения для скорости утечки, растяжения в силу ползучести и напряжений во вращающихся полых круговых цилиндрах из изотропного и однородного материала. При этом предполагается: 1) Удельный вес материала не меняется. 2) Отношения напряжений главного сдвига к соответствующим скоростям утечки равны между собой. 3) Скорость напряжения сравнения есть функция напряжения сравнения.

Чтобы описать поведения цилиндра также при больших деформациях, используется логарифмический закон растяжения. Таким образом может быть вычислено время прекращения действия цилиндра. В основе уравнений лежит закон текучести $\dot{\epsilon} = B \sigma^n$.

Nomenclature

Symbols

\ln	Natural logarithm (to base "e")	
ϵ	True (natural) strain	
$\dot{\epsilon}$	True (natural) strain rate, also significant true strain rate	(hr ⁻¹)
σ	True stress, also significant true stress	(lb in ⁻²)
K	Modulus of creep	(lb in ⁻² hr)
B	Creep coefficient	(in ² lb ⁻ⁿ hr ⁻¹)
n	Creep exponent	
r	Radius before deformation	(in)
r'	Radius after deformation	(in)
u	Change in radius due to deformation	(in)
\dot{r}'	Time rate of radius change	(in hr ⁻¹)
a	Original inner radius	(in)
b	Original outer radius	(in)
a'	Inner radius during deformation	(in)
b'	Outer radius during deformation	(in)
F	Force	(lb)
χ	Ratio of the significant true strain rate to the axial true strain rate	
α	χ evaluated at the inner radius	
β	χ evaluated at the outer radius	
R	Ratio of the inner and outer radii during deformation	
R_0	Ratio of the initial inner and outer radii	
t	Time	(hr)
ρ	Mass density	(lb sec ² in ⁻⁴)
ω	Angular velocity	(sec ⁻¹)
L	$B \rho \omega^2 (b^2 - a^2)$	(hr ⁻¹)

Subscripts

φ	tangential
r	radial
z	axial
a	at inner radius
b	at outer radius
f	at failure

1. Introduction

In problems concerned with deformations in the ranges of elasticity and primary creep it is generally sufficiently accurate to make the assumptions that strains are small and that they can be referred to the original dimensions of the body rather than to the instantaneous,

^{*)} Auszug aus der Magisterarbeit von J. R. LUKE, Toronto 1960. Ein Auszug aus dieser Abhandlung wurde auf dem X. Internationalen Kongreß für Angewandte Mechanik vorgetragen unter dem Titel „On the Creep Behaviour of Rotating Cylinders“.

deformed, dimensions. During secondary and tertiary creep, however, the magnitudes of deformations may reach values where the assumption that strains are small can no longer be made and the application of the finite strain concept becomes mandatory.

Based upon the large strain theory, an expression is obtained which relates the creep rate of the cylinder to the creep deformation and the angular velocity of the cylinder. Integration of this equation leads to a relation giving the creep deformation of the cylinder at any time for a given angular velocity.

The creep failure time is then obtained by letting the creep deformation approach infinity. It so happens that the time necessary to reach infinite deformation, turns out to be a finite quantity. The time to reach infinite deformation, called creep failure time, can be used to predict the time to actual fracture. Naturally, the cylinder will fracture before it has reached infinite deformation. The expansion of the cylinder, however, proceeds so slowly at the beginning and so rapidly towards the end of the life of the vessel, that the time to fracture and the time to reach infinite deformation differ only by an insignificant amount. This means that the creep failure time can be used to predict the time at which the cylinder will fracture.

The creep failure time for the case of simple tensile creep was predicted theoretically by OROWAN [1] and HOFF [2] and shown by the latter to be in good agreement with experimental findings. Creep failure times for the hollow closed-end cylinder and the hollow sphere under internal pressure were obtained by RIMROTT [3] and RIMROTT, MILLS and MARIN [4]. The present paper extends the theory to the problem of the rotating cylinder.

2. Assumptions

In the stress analysis of elastic systems in equilibrium, the linear relationship between stress and strain permits the use of the method of superposition. Under creep conditions however, the nonlinear relationship between stress and strain precludes superposition and the stresses must be considered as a combined effect. The following is a compilation of the assumptions and definitions on which the present study is based.

1) The cylinder is made of an isotropic and homogeneous material and retains its circular shape during deformation.

2) The volume of the material remains constant. Volume constancy can be expressed as

$$\epsilon_\varphi + \epsilon_r + \epsilon_z = 0 \quad \dots \dots \dots (1).$$

3) The true axial strain is constant with respect to the radius. That is

$$\epsilon_z = k \quad \dots \dots \dots (2).$$

Imposing this condition limits the discussion to long cylinders.

4) The principal strain axes do not rotate during creep. This permits differentiation of Equations (1) and (2) with respect to time to give the following creep strain rate relations

$$\dot{\epsilon}_\varphi + \dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_z = 0 \quad \dots \dots \dots (3),$$

$$\dot{\epsilon}_z = \dot{k} \quad \dots \dots \dots (4).$$

5) The ratios of the principal shear strain rates to the principal shear stresses are constant at a given point in the cylinder but may vary from point to point and with time.

$$\frac{\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_r}{\sigma_\varphi - \sigma_r} = \frac{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z}{\sigma_r - \sigma_z} = \frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\varphi}{\sigma_z - \sigma_\varphi} = \frac{3}{2K} \quad \dots \dots \dots (5).$$

Equations (5) are a statement to the effect that MOHR's circles of stress and strain rate are geometrically similar.

6) There exists a significant true strain rate versus significant true stress relationship which can be obtained from a simple tension test. That is

$$\dot{\epsilon} = f(\sigma) \quad \dots \dots \dots (6).$$

In this paper, the above relationship will be taken as

$$\dot{\epsilon} = B \sigma^n \quad \dots \dots \dots (7).$$

7) The significant true stress will be given by

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\varphi)^2]^{1/2} \quad \dots \dots \dots (8).$$

Equation (8), the VON MISES stress invariant, is felt to give the best correlation between the multiaxial stress system and the simple tension stress system for creep.

8) The significant true strain rate corresponding to the above significant true stress is given by

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_r)^2 + (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\varphi)^2]^{1/2} \dots \dots \dots (9).$$

3. Compatibility Condition

In the following work, the development of a number of equations based upon compatibility of strains is given. These equations will be needed later in the analysis.

The true circumferential strain is defined as (Fig. 1)

$$\epsilon_\varphi = \ln \left(1 + \frac{u}{r} \right) = \ln \left(\frac{r'}{r} \right) \dots \dots (10).$$

The true radial strain is defined as

$$\epsilon_r = \ln \left(1 + \frac{du}{dr} \right) = \ln \left(\frac{dr'}{dr} \right) \dots \dots (11).$$

Equations (10) and (11) may be differentiated with respect to time to give the true strain rates.

The true circumferential strain rate is then

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\dot{r}'}{r'} \dots \dots \dots (12).$$

The true radial strain rate is

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{d\dot{r}'}{dr'} \dots \dots \dots (13).$$

Combining Equations (12) and (13) and eliminating \dot{r}' and $d\dot{r}'$ gives the compatibility equation

$$\frac{r' d\dot{\epsilon}_\varphi}{dr'} = \dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi \dots \dots \dots (14).$$

Substituting Equation (4) into Equation (3) and solving for $\dot{\epsilon}_r$ gives

$$\dot{\epsilon}_r = -\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{k} \dots \dots \dots (15).$$

Substituting Equation (15) for $\dot{\epsilon}_r$ into Equation (14) gives

$$\frac{r' d\dot{\epsilon}_\varphi}{dr'} = -(2\dot{\epsilon}_\varphi + \dot{k}) \dots \dots \dots (16).$$

Equation (16) can be integrated by separating the variables and results in

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{r'^2} - \dot{k} \right) \dots \dots \dots (17),$$

where c is a constant of integration with respect to radius but a variable with respect to time.

Solving Equation (17) for c gives

$$c = r'^2 (2\dot{\epsilon}_\varphi + \dot{k}) \dots \dots \dots (18).$$

For $r' = a'$ and $r' = b'$ Equation (18) becomes

$$c = a'^2 (2\dot{\epsilon}_{\varphi a} + \dot{k}) = b'^2 (2\dot{\epsilon}_{\varphi b} + \dot{k}) \dots \dots \dots (19).$$

Substituting $\dot{\epsilon}_\varphi$ from Equation (17) into Equation (15) gives

$$\dot{\epsilon}_r = -\frac{1}{2} \left(\frac{c}{r'^2} + \dot{k} \right) \dots \dots \dots (20)$$

Substituting Equation (15) into Equation (9) gives

$$\dot{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\dot{\epsilon}_\varphi^2 + \dot{k} \dot{\epsilon}_\varphi + \dot{k}^2)^{1/2} \dots \dots \dots (21).$$

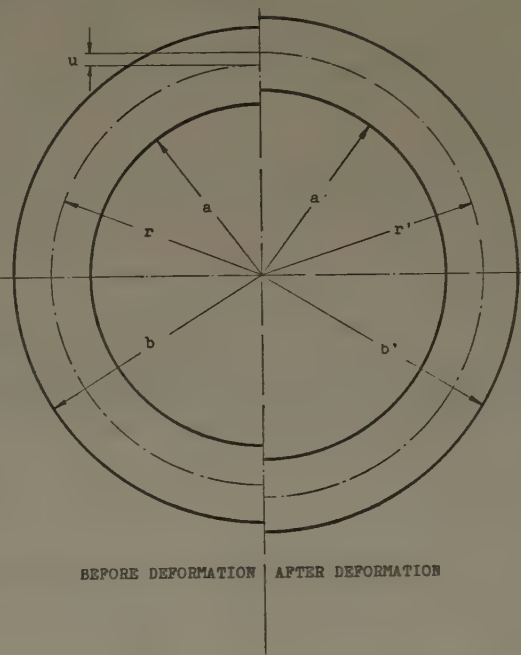


Fig. 1. Cross Section of a Cylinder

By rearranging Equation (21) one can obtain

$$(2 \dot{\epsilon}_\varphi + \dot{k}) = \sqrt{3} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} \quad (22).$$

Considering Equation (22), Equation (19) may also be written

$$c = a'^2 \sqrt{3} (\dot{\epsilon}_a^2 - \dot{k}^2)^{1/2} = b'^2 \sqrt{3} (\dot{\epsilon}_b^2 - \dot{k}^2)^{1/2} \quad (23).$$

From Equations (19) and (23), it is now possible to write

$$\frac{a'^2}{b'^2} = \frac{2 \dot{\epsilon}_{\varphi b} + \dot{k}}{2 \dot{\epsilon}_{\varphi a} + \dot{k}} = \frac{(\dot{\epsilon}_b^2 - \dot{k}^2)^{1/2}}{(\dot{\epsilon}_a^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} \quad (24).$$

Substituting Equations (17) and (20) into Equation (9) gives

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{c^2}{r'^4} + 3 \dot{k}^2 \right) \quad (25)$$

Making the substitution for c from Equation (23) we arrive at

$$\dot{\epsilon} = \left\{ \frac{a'^4}{r'^4} (\dot{\epsilon}_a^2 - \dot{k}^2) + \dot{k}^2 \right\}^{1/2} \quad (26).$$

4. Equilibrium Equation

The analysis can be continued by employing the equilibrium equation for a rotating cylinder in conjunction with the compatibility considerations previously developed.

The equilibrium equation for a rotating cylinder can be shown to be [5]

$$\frac{r'}{dr'} d\sigma_r = (\sigma_\varphi - \sigma_r) - \rho \omega^2 r'^2 \quad (27).$$

Equation (27) when rearranged becomes

$$d\sigma_r = (\sigma_\varphi - \sigma_r) \frac{dr'}{r'} - \rho \omega^2 r' dr' \quad (28)$$

Combining Equations (3), (4) and (5) gives

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{1}{K} \left\{ \sigma_\varphi - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_z) \right\} \quad (29),$$

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{1}{K} \left\{ \sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_\varphi) \right\} \quad (30),$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{1}{K} \left\{ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_\varphi + \sigma_r) \right\} \quad (31)$$

where

$$K = \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} \quad (32).$$

Solving Equation (31) for σ_z and substituting from Equation (32) gives the longitudinal stress

$$\sigma_z = \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} \dot{k} + \frac{1}{2} (\sigma_\varphi + \sigma_r) \quad (33).$$

Substituting σ_z from Equation (33) into Equation (8) and solving for $(\sigma_\varphi - \sigma_r)$,

$$(\sigma_\varphi - \sigma_r) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} \quad (34).$$

By rearranging Equation (16) it is possible to obtain

$$\frac{dr'}{r'} = \frac{-d\dot{\epsilon}_\varphi}{(2 \dot{\epsilon}_\varphi + \dot{k})} \quad (35).$$

Solving Equation (21) for $\dot{\epsilon}_\varphi$ gives

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{1}{2} \{ \sqrt{3} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} - \dot{k} \} \quad (36).$$

Differentiating Equation (36) and recalling that \dot{k} is a function of time alone,

$$d\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\dot{\epsilon} d\dot{\epsilon}}{(\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} \quad (37).$$

Substituting $d\dot{\epsilon}_\varphi$ from Equation (37) and $(2\dot{\epsilon}_\varphi + \dot{k})$ from Equation (22) into Equation (35) leads to

$$\frac{dr'}{r'} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\epsilon} d\dot{\epsilon}}{(\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)} \right\} \quad (38).$$

Returning to Equation (28) and substituting $(\sigma_\varphi - \sigma_r)$ from Equation (34) and $\frac{dr'}{r'}$ from Equation (38),

$$d\sigma_r = \frac{-\sigma d\dot{\epsilon}}{\sqrt{3} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} - \rho \omega^2 r' dr' \quad (39).$$

Equation (7) may be rewritten to read

$$\sigma = \left(\frac{\dot{\epsilon}}{B} \right)^{1/n} \quad (40).$$

Insertion of the above value for σ into Equation (39) gives

$$d\sigma_r = \frac{-1}{\sqrt{3} B^{1/n}} \left\{ \frac{\dot{\epsilon}^{1/n} d\dot{\epsilon}}{(\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} \right\} - \rho \omega^2 r' dr' \quad (41).$$

Imposing the boundary condition that $\sigma_r = 0$ at the inner radius of a hollow cylinder and then integrating Equation (41) gives

$$\sigma_r = \frac{-1}{\sqrt{3} B^{1/n}} \int_{\dot{\epsilon}_a}^{\dot{\epsilon}} \frac{\dot{\epsilon}^{1/n} d\dot{\epsilon}}{(\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} - \frac{\rho \omega^2}{2} (r'^2 - a'^2) \quad (42).$$

When the upper integration limit is $\dot{\epsilon}_b$ or b' then σ_r is again equal to zero and

$$\int_{\dot{\epsilon}_a}^{\dot{\epsilon}_b} \frac{\dot{\epsilon}^{1/n} d\dot{\epsilon}}{(\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} B^{1/n} \rho \omega^2 (b'^2 - a'^2) \quad (43).$$

5. The Axial Force

Another independent equation involving functions of $\dot{\epsilon}$ and r' is required for the solution of the problem and this is obtained by imposing the boundary condition that the resultant axial force acting on the cylinder be zero.

Returning to Equation (28), substituting $(\sigma_\varphi - \sigma_r)$ from Equation (34) and integrating,

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{a'}^{r'} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} \frac{dr'}{r'} - \frac{\rho \omega^2}{2} (r'^2 - a'^2) \quad (44).$$

Rearranging Equation (34) gives

$$\frac{1}{2} (\sigma_\varphi + \sigma_r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} + \sigma_r \quad (45).$$

Substituting σ_r from Equation (44) into Equation (45) and then substituting the resulting equation for $(\sigma_\varphi + \sigma_r)/2$ into Equation (33) gives

$$\sigma_z = \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} k + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{a'}^{r'} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} \frac{dr'}{r'} - \frac{\rho \omega^2}{2} (r'^2 - a'^2) \quad (46).$$

Since the resultant axial force is zero,

$$F_z = 2\pi \int_{a'}^{b'} \sigma_z r' dr' = 0 \quad (47).$$

Thus

$$\int_{a'}^{b'} \sigma_z r' dr' = 0 \quad (48).$$

Substituting Equation (46) for σ_z into Equation (48) gives

$$0 = \int_{a'}^{b'} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} \dot{k} r' dr' + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{a'}^{b'} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} r' dr' + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{a'}^{b'} \left\{ \int_{a'}^{r'} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} \frac{dr'}{r'} \right\} r' dr' - \frac{\rho \omega^2}{2} \int_{a'}^{b'} (r'^2 - a'^2) r' dr' \quad (49).$$

The double integral can be integrated by parts, giving

$$\frac{b'^2}{\sqrt{3}} \int_{a'}^{b'} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} \frac{dr'}{r'} - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{a'}^{b'} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} r' dr' \quad (50).$$

Integrating Equation (44) between limits a' and b' makes σ_r equal to zero, hence

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{a'}^{b'} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} \frac{dr'}{r'} = \frac{\rho \omega^2}{4} (r'^2 - a'^2) \quad (51).$$

Substitution of Equation (51) into the expression for the double integral given in (50) gives

$$\frac{\rho \omega^2}{4} b'^2 (r'^2 - a'^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{a'}^{b'} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2} r' dr' \quad (52).$$

By evaluating the last integral in Equation (49), substituting (52) for the double integral and simplifying, one arrives at

$$\int_{a'}^{b'} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} \dot{k} r' dr' = -\frac{\rho \omega^2}{8} (b'^4 - a'^4) \quad (53).$$

From rearranging Equation (25),

$$r'^2 = \frac{c}{\sqrt{3} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} \quad (54).$$

From Equation (38)

$$\frac{dr'}{r'} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\epsilon} d\dot{\epsilon}}{(\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)} \right\} \quad (38).$$

Thus

$$r' dr' = \frac{-c \dot{\epsilon} d\dot{\epsilon}}{2\sqrt{3} (\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{3/2}} \quad (55).$$

Substituting Equations (55) and (40) into Equation (53) and rearranging leads to

$$\int_{\dot{\epsilon}_a}^{\dot{\epsilon}_b} \frac{\dot{\epsilon}^{1/n} d\dot{\epsilon}}{(\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{3} B^{1/n}}{4 c \dot{k}} \rho \omega^2 (b'^4 - a'^4) \quad (56).$$

Considering Equations (23) and (24) it can be shown that

$$\left(\frac{b'^2 + a'^2}{c} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{(\dot{\epsilon}_b^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} + \frac{1}{(\dot{\epsilon}_a^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} \right\} \quad (57).$$

Substituting $\left(\frac{b'^2 + a'^2}{c} \right)$ from Equation (57) and $\frac{\sqrt{3}}{2} B^{1/n} \rho \omega^2 (b'^2 - a'^2)$ from Equation (43) into Equation (56) gives

$$-2\sqrt{3} \dot{k} \int_{\dot{\epsilon}_a}^{\dot{\epsilon}_b} \frac{\dot{\epsilon}^{1/n} d\dot{\epsilon}}{(\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{3/2}} = \left\{ \frac{1}{(\dot{\epsilon}_b^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} + \frac{1}{(\dot{\epsilon}_a^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} \right\} \int_{\dot{\epsilon}_a}^{\dot{\epsilon}_b} \frac{\dot{\epsilon}^{1/n} d\dot{\epsilon}}{(\dot{\epsilon}^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} \quad (58).$$

At this point it becomes advantageous to define and introduce the following dimensionless ratios

$$\chi = \frac{\dot{\epsilon}}{k} \quad \dots \dots \dots (59),$$

$$\alpha = \frac{\dot{\epsilon}_a}{k} \quad \dots \dots \dots (60),$$

$$\beta = \frac{\dot{\epsilon}_b}{k} \quad \dots \dots \dots (61).$$

Using these new expressions, Equation (58) becomes

$$-2\sqrt{3} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi^{1/n} d\chi}{\sqrt[3]{\chi^2 - 1}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right\} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi^{1/n} d\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \quad \dots \dots \dots (62).$$

From rearranging Equation (10)

$$r' = r e^{\epsilon_{\varphi}} \quad \dots \dots \dots (63).$$

Thus

$$a' = a e^{\epsilon_{\varphi a}} \quad \dots \dots \dots (64),$$

$$b' = b e^{\epsilon_{\varphi b}} \quad \dots \dots \dots (65).$$

From considering Equations (1), (2), (10) and (11) it can be shown that

$$e^k (r'^2 - a'^2) = (r^2 - a^2) \quad \dots \dots \dots (66).$$

Thus

$$e^k (b'^2 - a'^2) = (b^2 - a^2) \quad \dots \dots \dots (67).$$

Dividing both sides of Equation (67) by b'^2 and employing Equation (65) gives

$$e^{2\epsilon_{\varphi b} + k} = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{a'^2}{b'^2}\right)} \quad \dots \dots \dots (68).$$

At this point, let us define and introduce the dimensionless ratios

$$R = \frac{a'}{b'} \quad \dots \dots \dots (69),$$

$$R_0 = \frac{a}{b} \quad \dots \dots \dots (70).$$

Equation (68) then becomes

$$e^{2\epsilon_{\varphi b} + k} = \frac{1 - R_0^2}{1 - R^2} \quad \dots \dots \dots (71).$$

Similarly, it can be shown that

$$e^{2\epsilon_{\varphi a} + k} = \frac{1 - R_0^2}{R_0^2} \cdot \frac{R^2}{1 - R^2} \quad \dots \dots \dots (72).$$

Differentiating Equation (71) with respect to time gives

$$2\dot{\epsilon}_{\varphi b} + \dot{k} = \frac{2R}{1 - R^2} \cdot \frac{dR}{dt} \quad \dots \dots \dots (73).$$

Equation (24) can be extended to include the new quantities R , α and β and becomes

$$R^2 = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{2\dot{\epsilon}_{\varphi b} + \dot{k}}{2\dot{\epsilon}_{\varphi a} + \dot{k}} = \frac{(\dot{\epsilon}_b^2 - \dot{k}^2)^{1/2}}{(\dot{\epsilon}_a^2 - \dot{k}^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \quad \dots \dots \dots (74).$$

Hence,

$$(2 \dot{\epsilon}_{\varphi a} + \dot{k}) = \frac{2}{R(1-R^2)} \cdot \frac{dR}{dt} \quad (75).$$

Equation (22) may be rewritten as

$$(2 \dot{\epsilon}_{\varphi} + \dot{k}) = \frac{1}{3} \dot{k} \sqrt{\chi^2 - 1} \quad (76).$$

Solving for \dot{k} gives

$$\dot{k} = \frac{(2 \dot{\epsilon}_{\varphi a} + \dot{k})}{\sqrt{3} \sqrt{\alpha^2 - 1}} = \frac{(2 \dot{\epsilon}_{\varphi b} + \dot{k})}{\sqrt{3} \sqrt{\beta^2 - 1}} \quad (77).$$

The next step is to express $\sqrt{\alpha^2 - 1}$ or $\sqrt{\beta^2 - 1}$ as functions of R so that Equation (77) can be integrated to find k . This necessary relationship can be obtained by employing Equation (62) and replacing $\sqrt{\beta^2 - 1}$ by $R^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}$.

The creep exponent n in Equation (62) usually has a value between 1 and 10 and the relationship developed between $\sqrt{\alpha^2 - 1}$ and R will depend upon the value chosen for n . For reasons which will become evident later, it is best to select a value for n at this point and proceed with a particular solution. In the case at hand, n will be taken equal to 1 and the cases where n is other than 1 will be investigated later.

6. Solution for $n = 1$

When $n = 1$, the integrals in Equation (62) become

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi d\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \quad (78),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi d\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} = \sqrt{\beta^2 - 1} - \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (79).$$

Making these substitutions into Equation (62), replacing $\sqrt{\beta^2 - 1}$ by $R^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}$ and solving for $\sqrt{\alpha^2 - 1}$ gives

$$\sqrt{\alpha^2 - 1} = \frac{-2\sqrt{3}}{1 + R^2} \quad (80)$$

and

$$\sqrt{\beta^2 - 1} = \frac{-2\sqrt{3} R^2}{1 + R^2} \quad (81).$$

The relationships expressed by Equations (80) and (81) are plotted in Figure 2.

Considering Equations (75) and (80), Equation (77) becomes

$$\dot{k} = \frac{-1(1 + R^2)}{3R(1 - R^2)} \cdot \frac{dR}{dt} \quad (82).$$

Integrating Equation (82) gives

$$k = \frac{1}{3} \ln \left\{ \frac{R_0}{1 - R_0^2} \cdot \frac{1 - R^2}{R} \right\} \quad (83),$$

from which

$$e^k = \left\{ \frac{R_0}{1 - R_0^2} \cdot \frac{1 - R^2}{R} \right\}^{1/3} \quad (84).$$

Considering Equations (59) and (67), Equation (43) may be written as

$$\dot{k}^{1/n} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi^{1/n} d\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} B^{1/n} \varrho \omega^2 (b^2 - a^2) e^{-k} \quad (85).$$

In this case, $n = 1$ and Equation (85) can be integrated using Equation (79) to give

$$e^k \dot{k} (\sqrt{\beta^2 - 1} - \sqrt{\alpha^2 - 1}) = \frac{-\sqrt{3}}{2} B \varrho \omega^2 (b^2 - a^2) \quad (86).$$

Substituting e^k from Equation (84), \dot{k} from Equation (82), $\sqrt{\beta^2 - 1}$ from Equation (81), $\sqrt{\alpha^2 - 1}$ from Equation (80) and solving for the time t by integration gives

$$t = \frac{4}{3 B \rho \omega^2 (b^2 - a^2)} \left\{ \frac{R_0}{1 - R_0^2} \right\}^{1/3} \int_{R_0}^R \left(\frac{1 - R^2}{R^4} \right)^{1/3} dR \quad \dots \quad (87).$$

Evaluating Equation (87) by series integration and making the substitution

$$L = B \rho \omega^2 (b^2 - a^2) \quad \dots \quad (88)$$

gives

$$L \cdot t = 4 \left\{ \frac{R_0}{1 - R_0^2} \right\}^{1/3} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-)^{\lambda} \left(\frac{1}{3} \right)! \left(R^{\frac{6\lambda-1}{3}} - R_0^{\frac{6\lambda-1}{3}} \right)}{(\lambda)! \left(\frac{1}{3} - \lambda \right)! (6\lambda - 1)} \quad \dots \quad (89).$$

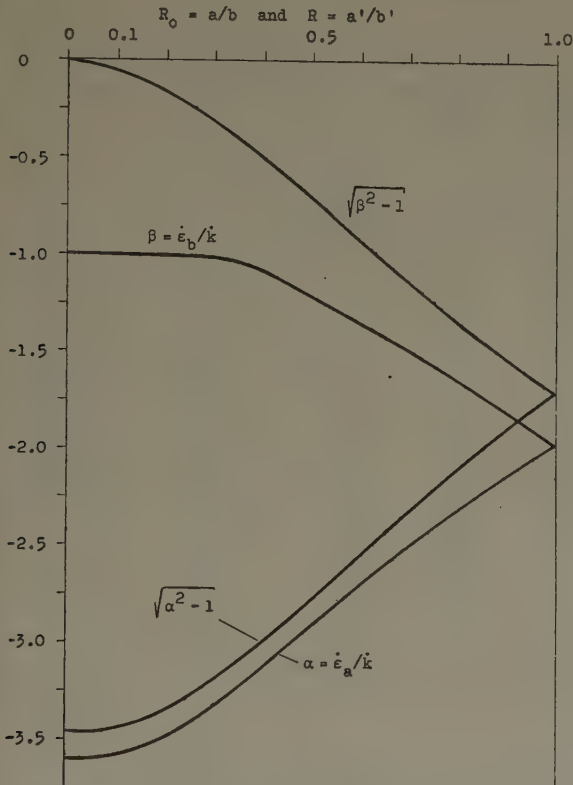


Fig. 2. Values of $\sqrt{\alpha^2 - 1}$, $\sqrt{\beta^2 - 1}$, α , and β versus R for $n = 1$

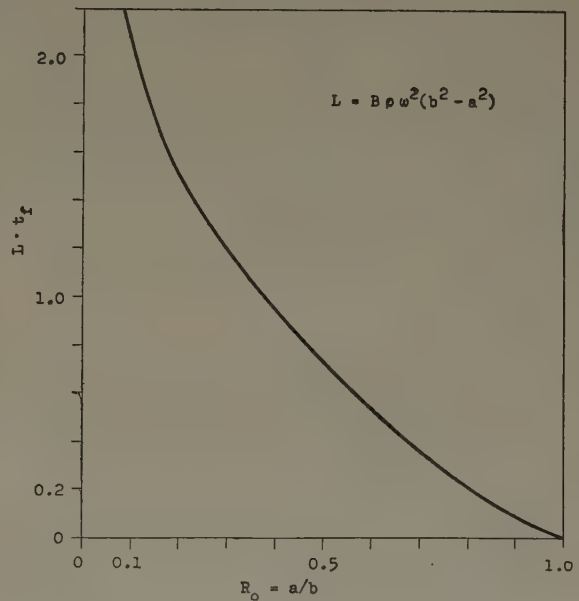


Fig. 3. Creep Failure Time versus Initial Radii Ratio for $n = 1$

Equation (89) states that if the initial radii ratio R_0 and the constant L are assigned values, the instantaneous radii ratio R can be determined at any time in the future. With R known, the cylinder can be completely analysed by employing equations developed previously.

Mathematically the creep failure time t_f is the time at which the creep strains reach infinity. Physically, failure by fracture will occur when the strains are much, much less than infinity. However, because the strains change extremely rapidly from relatively small values to infinity at times close to the theoretical failure time, this theoretical failure time t_f becomes a useful approximation for the life of the cylinder. In the case at hand, the condition that the strains be infinity, is equivalent to the condition that the instantaneous radii ratio R be equal to one. This more convenient latter condition will be employed.

Thus, from Equation (89) it can be seen that

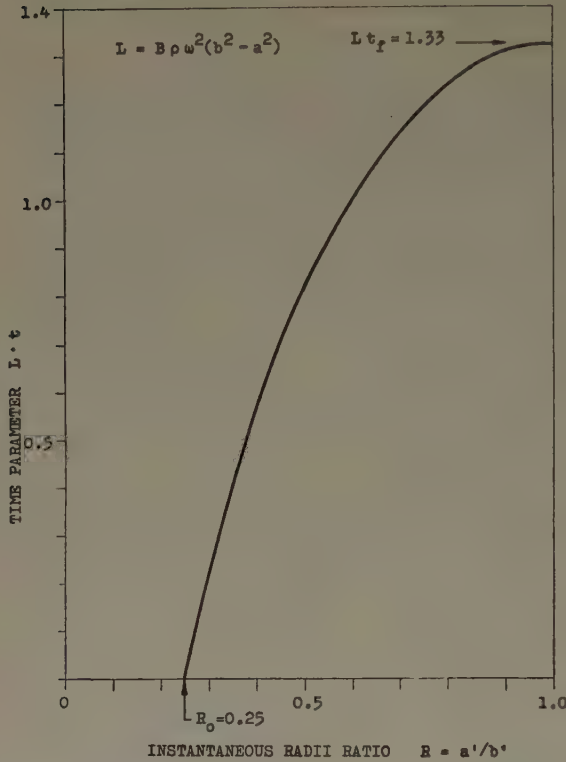
$$L \cdot t_f = 4 \left[\frac{R_0}{1 - R_0^2} \right]^{1/3} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-)^{\lambda} \left(\frac{1}{3} \right)! \left(1 - R_0^{\frac{6\lambda-1}{3}} \right)}{(\lambda)! \left(\frac{1}{3} - \lambda \right)! (6\lambda - 1)} \quad \dots \quad (90).$$

Values of the dimensionless creep failure time parameter $L \cdot t_f$ are plotted in Figure 3 for cylinders having an initial radii ratio R_0 between 0.1 and 1.0. With the value of $R_0 = a/b$ known,

Figure 3 will provide $L \cdot t_f$ and since L is a constant known from initial conditions the creep failure time t_f can be determined and the life expectancy of the cylinder found.

In the solution of the problem, it became apparent that finding the stresses and strains as functions of time directly would be much more complicated than employing a two step procedure, the first step of which involves the determination of R at a given time and the second involves the determination of the stresses and strains as functions of the now known quantity R .

For a given R_0 , Equation (89) allows the determination of R as a function of the time parameter $L \cdot t$. As an example, when $R_0 = 1/4$ Equation (89) becomes



$$L \cdot t = 2.58 \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-)^{\lambda} \left(\frac{1}{3}\right)! \left(R^{\frac{6\lambda-1}{3}} - (0.25)^{\frac{6\lambda-1}{3}}\right)}{(\lambda)! \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)! (6\lambda - 1)} \quad (91).$$

Values of $L \cdot t$ obtained for the range $0.25 \leq R \leq 1.0$ are plotted in Figure 4 and tabulated in Table I.

Table I

$R_0 = \frac{1}{4}$				
R	$L \cdot t$	$\epsilon_{\varphi a}$	ϵ_{ra}	k
0.25	0	0	0	0
.30	0.215	0.2312	-0.1608	-0.0704
.40	.566	.6215	-.4285	-.1930
.50	.810	.9580	-.6530	-.3050
.60	.980	1.275	-.8550	-.4200
.70	1.120	1.600	-1.055	-.5450
.80	1.240	1.990	-1.284	-.7060
.90	1.280	2.560	-1.600	-.9600
.95	1.305	3.045	-1.855	-1.19
.96	1.310	3.210	-1.940	-1.27
.97	1.315	3.415	-2.045	-1.37
.98	1.320	3.700	-2.190	-1.51
.99	1.325	4.170	-2.430	-1.74
1.00	1.330	∞	$-\infty$	$-\infty$

Fig. 4. Instantaneous Radii Ratio versus Time for $R_0 = 0.25$

Strains and deformations can be found as functions of the ratio R (and hence as function of the time t).

The axial strain is found from Equation (83) as

$$k = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{R_0}{1 - R_0^3} \cdot \frac{1 - R^3}{R} \right) \quad (83).$$

From Equation (84)

$$e^k = \left(\frac{R_0}{1 - R_0^3} \cdot \frac{1 - R^3}{R} \right)^{1/3} \quad (84).$$

From Equation (72)

$$e^{2\epsilon_{\varphi a} + k} = \left(\frac{1 - R_0^3}{R_0^3} \cdot \frac{R^2}{1 - R^2} \right) \quad (72).$$

Thus

$$e^{2\epsilon_{\varphi a}} = \left[\frac{1 - R_0^3}{R_0^3} \right]^{1/3} \cdot \left[\frac{1 - R_0^3}{R_0^3} \right] \cdot \left[\frac{R}{1 - R^2} \right]^{1/3} \cdot \left[\frac{R^2}{1 - R^2} \right] \quad (92).$$

Employing Equation (64) it is now possible to determine the actual inner and outer radii at any value of the (time dependent) ratio R .

$$a'^2 = a^2 \left[\frac{1 - R_0^3}{R_0^3} \right]^{1/3} \left[\frac{1 - R_0^3}{R_0^3} \right] \left[\frac{R}{1 - R^2} \right]^{1/3} \left[\frac{R^2}{1 - R^2} \right] \quad (93),$$

$$b'^2 = \frac{a'^2}{R^2} \quad (94).$$

From considering Equations (63), (64) and (65) it can be shown that

$$\varepsilon_\varphi = \frac{-1}{2} \ln \left[1 + \frac{a'^2}{r'^2} \left(\frac{1}{e^{2\varepsilon_\varphi + k}} - 1 \right) \right] - \frac{k}{2} \quad \dots \dots \dots (95).$$

In the above equation, a'^2 , $e^{2\varepsilon_\varphi + k}$, and k have already been determined and ε_φ is thus a function of r' alone and can be found for any point in the cylinder wall.

The maximum value for ε_φ will always be $\varepsilon_{\varphi a}$ at the inner radius. Rearranging Equation (92) gives

$$\varepsilon_{\varphi a} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{R_0}{1 - R_0^2} \right]^{1/3} \left[\frac{1 - R_0^2}{R_0^2} \right] \left[\frac{1 - R^2}{R} \right]^{1/3} \left[\frac{R^2}{1 - R^2} \right] \quad \dots \dots \dots (96).$$

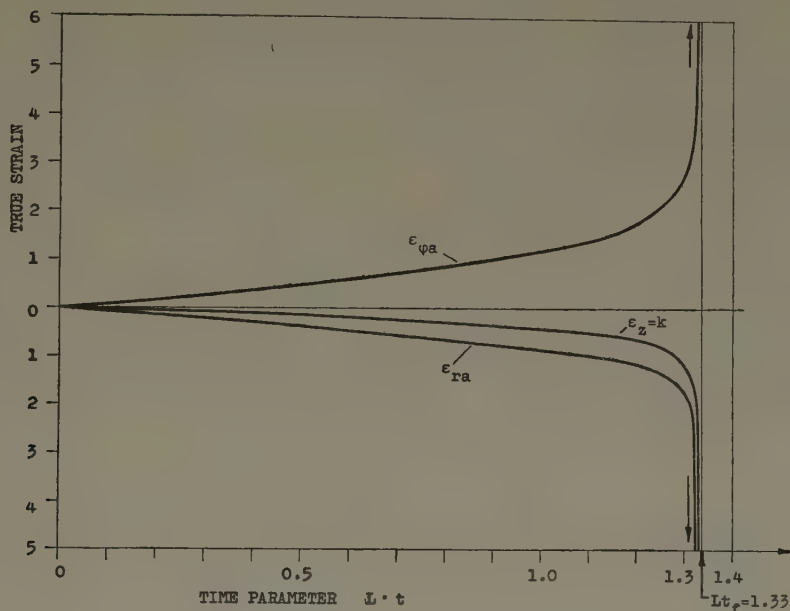


Fig. 5. Strains at Bore versus Time for $R_0 = 0.25$ and $n = 1$

Since ε_φ and k are now known, the radial strain is, from Equation (1)

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\varphi - k \quad \dots \dots \dots (97).$$

Values of $\varepsilon_{\varphi a}$, ε_{ra} , and k determined from the above equations for the case of $n = 1$ and $R_0 = 1/4$ are tabulated in Table I and plotted in Figure 5 against $L \cdot t$. Table I illustrates quantitatively the extremely rapid increase of strain at times close to the theoretical failure time.

The strain rates may also be determined in terms of the ratio R (and hence as function of time).

From considering Equations (82) and (87) the longitudinal strain rate becomes

$$\dot{k} = \frac{-L}{4} \left[\frac{1 - R_0^2}{R_0} \right]^{1/3} \left[\frac{R}{1 - R^2} \right]^{1/3} \left[\frac{1 + R^2}{1 - R^2} \right] \quad \dots \dots \dots (98).$$

From Equations (60) and (80)

$$(\dot{\varepsilon}_a^2 - \dot{k}^2)^{1/2} = \frac{-2\sqrt{3}\dot{k}}{1 + R^2} \quad \dots \dots \dots (99).$$

Equation (26) then becomes

$$\dot{\varepsilon} = -\dot{k} \left[\frac{a'^4}{r'^4} \left(\frac{12}{(1 - R^2)^2} \right) + 1 \right]^{1/2} \quad \dots \dots \dots (100).$$

The maximum value of $\dot{\varepsilon}$ will always be at the inner wall and

$$\dot{\varepsilon}_a = -\dot{k} \left[\frac{12}{(1 + R^2)^2} + 1 \right]^{1/2} \quad \dots \dots \dots (101).$$

Similarly, Equation (36) can be rearranged to give the tangential strain rate

$$\dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{-\dot{k}}{2} \left[\frac{a'^2}{r'^2} \left(\frac{6}{1 + R^2} \right) + 1 \right] \quad \dots \dots \dots (102).$$

Equation (15) gives the radial strain rate

$$\dot{\epsilon}_r = -\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{k} \quad \dots \quad (15).$$

The creep strain rates at $t = 0$ can be found by observing that $R = R_0$, $a' = a$ and $b' = b$. Equation (98) then becomes

$$\dot{k} = \frac{-L}{4} \left(\frac{1 + R_0^2}{1 - R_0^2} \right) \quad \dots \quad (103).$$

Equation (100) becomes

$$\dot{\epsilon} = -\dot{k} \left[\frac{a^4}{r^4} \left(\frac{12}{(1 + R_0^2)^2} \right) + 1 \right]^{1/2} \quad \dots \quad (104).$$

Equation (102) becomes

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{-\dot{k}}{2} \left[\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{6}{1 + R_0^2} \right) + 1 \right] \quad \dots \quad (105).$$

Following the pattern as established, the stress distributions over the cylinder wall will also be expressed as functions of R .

Equation (42) may be written as

$$\sigma_r = \frac{-\dot{k}^{1/n}}{\sqrt{3} B^{1/n}} \int_a^r \frac{\chi^{1/n} d\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} - \frac{\rho \omega^2}{2} (r'^2 - a'^2) \quad \dots \quad (106).$$

In the case at hand, $n = 1$ and integration gives

$$\sigma_r = \frac{-\dot{k}}{\sqrt{3} B} (\sqrt{\chi^2 - 1} - \sqrt{a^2 - 1}) - \frac{\rho \omega^2}{2} (r'^2 - a'^2) \quad \dots \quad (107).$$

Now

$$\sqrt{\chi^2 - 1} = \frac{a'^2}{r'^2} \sqrt{a^2 - 1} \quad \dots \quad (108).$$

After appropriate substitution of Equations (108), (80) and (98), Equation (107) becomes

$$\sigma_r = \left\{ \frac{L}{2B} \left[\frac{1 - R_0^2}{R_0} \right]^{1/3} \left[\frac{R}{1 - R^2} \right]^{1/3} \left[\frac{1}{1 - R^2} \right] \right\} \left\{ 1 - \frac{a'^2}{r'^2} \right\} - \frac{\rho \omega^2}{2} (r'^2 - a'^2) \quad \dots \quad (109).$$

Remembering that when $n = 1$

$$\frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} = \frac{1}{B} \quad \dots \quad (110).$$

Equation (34) can be modified to give

$$\sigma_\varphi = \left\{ \frac{L}{2B} \left[\frac{1 - R_0^2}{R_0} \right]^{1/3} \left[\frac{R}{1 - R^2} \right]^{1/3} \left[\frac{1}{1 - R^2} \right] \right\} \left\{ 1 + \frac{a'^2}{r'^2} \right\} - \frac{\rho \omega^2}{2} (r'^2 - a'^2) \quad \dots \quad (111).$$

From Equation (33) it can be shown that

$$\sigma_s = \left\{ \frac{L}{4B} \left[\frac{1 - R_0^2}{R_0} \right]^{1/3} \left[\frac{R}{1 - R^2} \right]^{1/3} \right\} - \frac{\rho \omega^2}{2} (r'^2 - a'^2) \quad \dots \quad (112).$$

The significant true stress σ can be found by employing Equation (8) but if $\dot{\epsilon}$ has been determined across the wall, an easier method is to use Equation (22) in the form

$$\sigma = \frac{\dot{\epsilon}}{B} \quad \dots \quad (113).$$

For an analysis of creep stresses at $t = 0$, Equation (21) can be shown to be

$$\sigma_r = \frac{\rho \omega^2}{2} \left[(b^2 + a^2) - \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} + r^2 \right) \right] \quad \dots \quad (114).$$

Equation (111) becomes

$$\sigma_\varphi = \frac{\rho \omega^2}{2} \left[(b^2 + a^2) + \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) \right] \quad \dots \quad (115).$$

Equation (112) becomes

$$\sigma_s = \frac{\rho \omega^2}{2} \left[\left(\frac{b^2 + a^2}{2} \right) - r^2 \right] \quad \dots \quad (116).$$

Equations (114), (115) and (116) will give the initial creep stresses in a cylinder made of any material without the restriction that n be 1. While the initial stresses may be the same for any material, the creep rates will not be as they are determined by the values of B and n in Equation (7)

$$\dot{\epsilon} = B \sigma^n \dots \dots \dots (7).$$

The distributions of strain rates, stresses, and strains across the cylinder wall were computed for an example and are shown in Figures 6, 7, 8, 9 and 10. In the example the following data were used: $B = 18 \cdot 10^{-11}$ (in² lb⁻¹ h⁻¹), $n = 1$, $\rho \omega^2 = 6000$ (lb in⁻⁴), $a = 1$ (in), $b = 4$ (in).

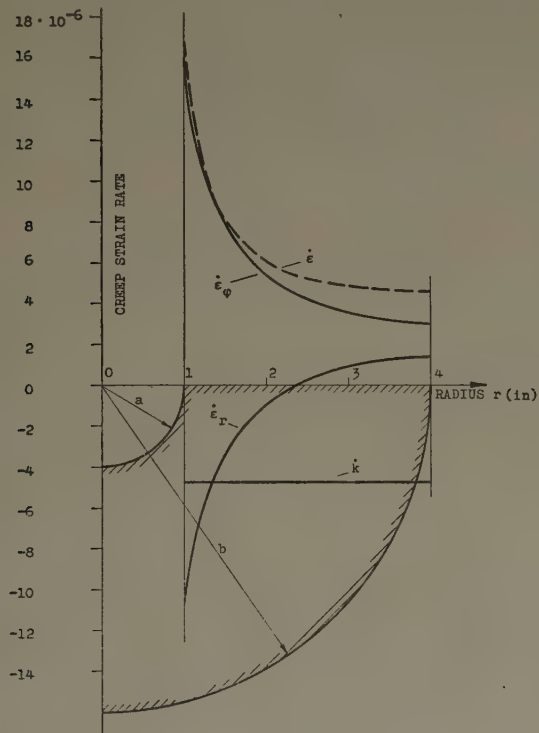


Fig. 6. Initial Distribution of Creep Strain Rates across the Cylinder Wall

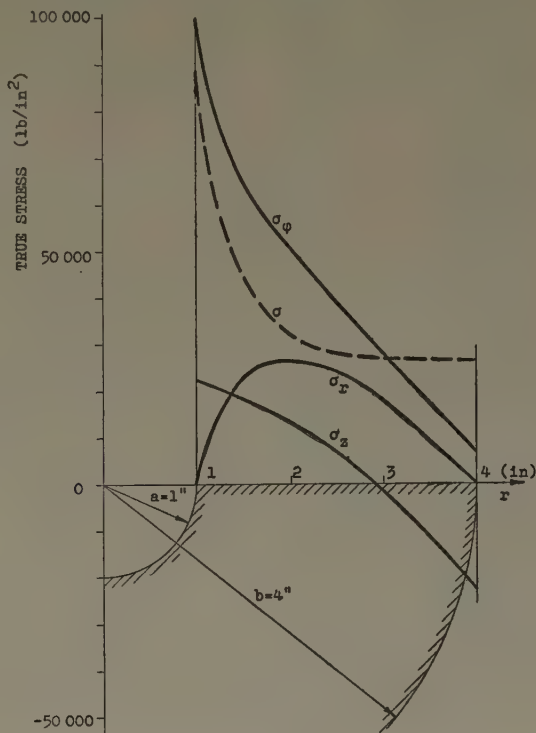


Fig. 7. Initial Distribution of Stresses across Cylinder Wall

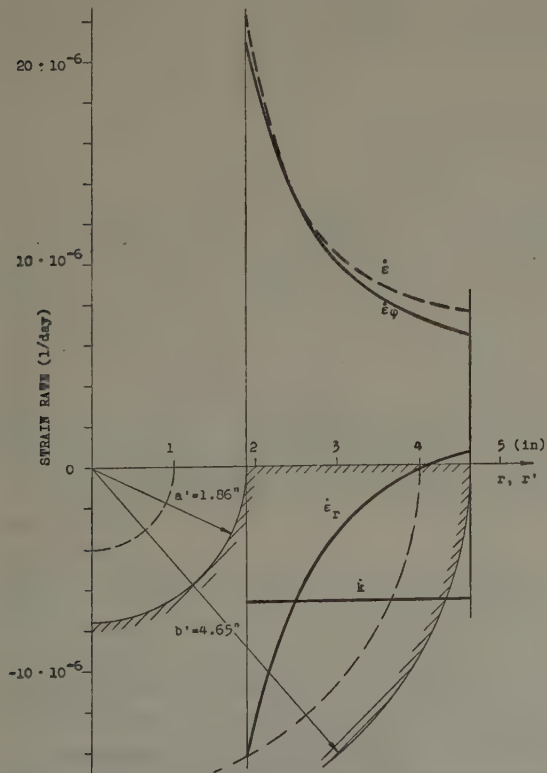


Fig. 8. Distribution of Strain Rates across Cylinder Wall at 35,000 hrs

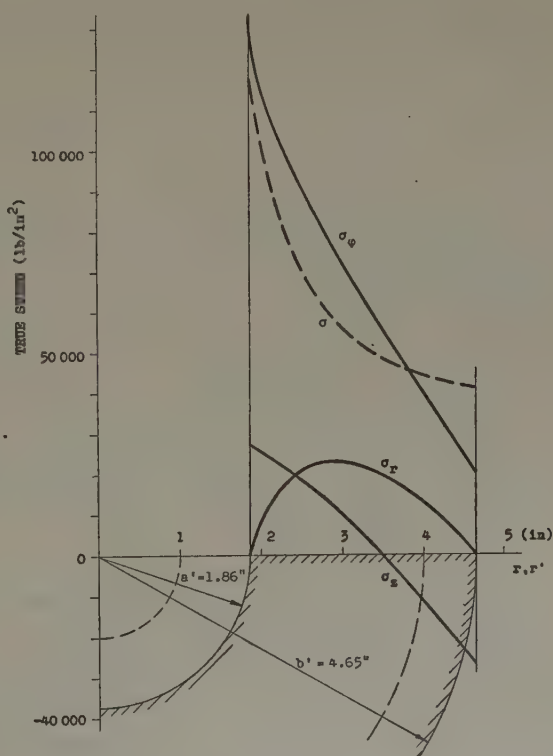


Fig. 9. Distribution of Stresses across the Cylinder Wall at 35,000 hrs

7. Solution for $n \neq 1$

Equation (77) stated that

$$\dot{k} = \frac{2 \dot{\epsilon}_{\varphi a} + \dot{k}}{\sqrt{3} \sqrt{\alpha^2 - 1}} = \frac{2 \dot{\epsilon}_{\varphi b} + \dot{k}}{\sqrt{3} \sqrt{\beta^2 - 1}} \quad \dots \quad (77).$$

As mentioned previously, it is necessary to develop a relationship between either $\sqrt{\alpha^2 - 1}$ or $\sqrt{\beta^2 - 1}$ and the instantaneous radii ratio R , so that Equation (77) can be integrated.

It is possible to eliminate one of the two integrals in Equation (62) for it can be shown that integration by parts of the latter integral and appropriate rearrangement will produce the following interdependency relationship.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi^{\frac{1}{n}} d\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} = \frac{1}{n} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi^{\frac{1}{n}} d\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} - \frac{\chi^{\frac{1}{n} + 1}}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \Big|_{\alpha}^{\beta} \quad (117).$$

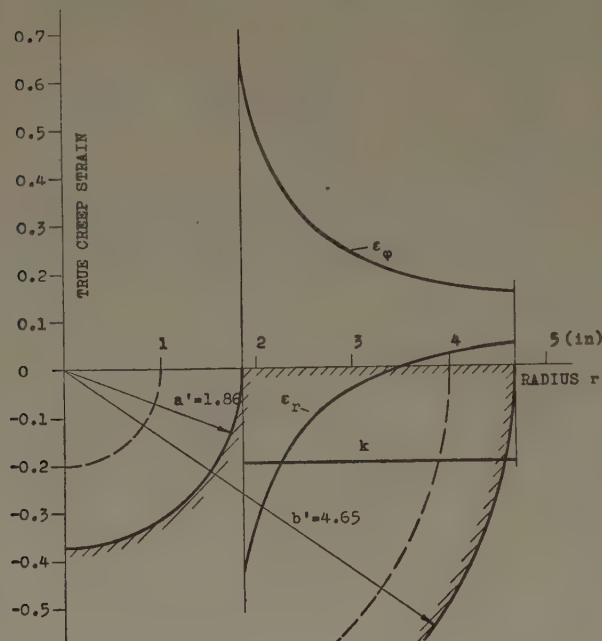


Fig. 10. Strains across the Cylinder Wall at 35000 hrs

Substituting the above into Equation (62), rearranging and simplifying gives

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi^{\frac{1}{n}} d\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} = \frac{2 \sqrt{3} n \left(\beta^{\frac{1}{n} + 1} \sqrt{\alpha^2 - 1} - \alpha^{\frac{1}{n} + 1} \sqrt{\beta^2 - 1} \right)}{(2 \sqrt{3} \sqrt{\alpha^2 - 1} \sqrt{\beta^2 - 1}) + n (\sqrt{\alpha^2 - 1} + \sqrt{\beta^2 - 1})} \quad \dots \quad (118).$$

When integrated by means of series, Equation (118) becomes

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)! \left(\beta^{\frac{1}{n} - 2\lambda} - \alpha^{\frac{1}{n} - 2\lambda} \right)}{(2^{2\lambda}) (\lambda!)^2 (1 - 2\lambda n)} = \frac{2 \sqrt{3} \left(\beta^{\frac{1}{n} + 1} \sqrt{\alpha^2 - 1} - \alpha^{\frac{1}{n} + 1} \sqrt{\beta^2 - 1} \right)}{(2 \sqrt{3} \sqrt{\alpha^2 - 1} \sqrt{\beta^2 - 1}) + n (\sqrt{\alpha^2 - 1} + \sqrt{\beta^2 - 1})} \quad (119).$$

Since α and β are always negative, it is advisable for simplified computation to rearrange Equation (119) to

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)! \left(\beta^{-2\lambda} - \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^{\frac{1}{n}} \alpha^{-2\lambda} \right)}{(2^{2\lambda}) (\lambda!)^2 (1 - 2\lambda n)} = \frac{2 \sqrt{3} \left(\beta \sqrt{\alpha^2 - 1} - \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^{\frac{1}{n}} \alpha \sqrt{\beta^2 - 1} \right)}{(2 \sqrt{3} \sqrt{\alpha^2 - 1} \sqrt{\beta^2 - 1}) + n (\sqrt{\alpha^2 - 1} + \sqrt{\beta^2 - 1})} \quad (120).$$

If Equation (118) cannot be integrated directly, Equation (120) can be employed in the following manner to relate $\sqrt{\alpha^2 - 1}$, $\sqrt{\beta^2 - 1}$ and R .

From Equation (74)

$$\sqrt{\beta^2 - 1} = R^2 \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad \dots \quad (121).$$

By investigating R over the range $0 < R \leq 1$ the entire range of possible cylinder wall thicknesses during creep will be explored.

For a particular value of R , α can be estimated and $\sqrt{\beta^2 - 1}$ determined from Equation (121). These values can now be entered into Equation (120) and if it is satisfied, the correct values of $\sqrt{\alpha^2 - 1}$ and $\sqrt{\beta^2 - 1}$ will have been found. By following this procedure for other values of R , values of $\sqrt{\alpha^2 - 1}$ and $\sqrt{\beta^2 - 1}$, α and β can be determined and plotted in a manner similar to that

illustrated for the case of $n = 1$ (Figure 3). There would be a plot similar to Figure 3 for each value chosen for n and by appropriate curve fitting techniques, $\sqrt{\alpha^2 - 1}$, $\sqrt{\beta^2 - 1}$, α and β can be found as functions of R .

From Equations (75) and (77)

$$dk = \frac{2 dR}{\sqrt{3} R (1 - R^2) \sqrt{\alpha^2 - 1}} \quad \dots \dots \dots (122).$$

Knowing $\sqrt{\alpha^2 - 1}$ as a function of R makes it possible to integrate Equation (122) to find k and e^k as functions of R and R_0 as was done for $n = 1$.

Returning then to Equation (85) and rearranging it, gives

$$e^k k^{1/n} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi^{1/n} d\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} B^{1/n} \varrho \omega^2 (b^2 - a^2) \quad \dots \dots \dots (123).$$

Solving for t by integration gives

$$t = \left[\frac{-2}{\sqrt{3} B^{1/n} \varrho \omega^2 (b^2 - a^2)} \right]^n \int_{R_0}^R \left[\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\chi^{1/n} d\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \right]^n e^{nk} dk \quad \dots \dots \dots (124).$$

Employing Equation (118), the above equation can be expressed as

$$Bt = \left[\frac{-4n}{\varrho \omega^2 (b^2 - a^2)} \right]^n \int_{R_0}^R \left[\frac{\beta^{\frac{1}{n}+1} \sqrt{\alpha^2 - 1} - \alpha^{\frac{1}{n}+1} \sqrt{\beta^2 - 1}}{(2\sqrt{3} \sqrt{\alpha^2 - 1} \sqrt{\beta^2 - 1}) + n(\sqrt{\alpha^2 - 1} + \sqrt{\beta^2 - 1})} \right]^n e^{nk} dk \quad (125).$$

Since everything inside the integral sign has already been determined as a function of R , substitution of the various quantities, simplification and integration will give the instantaneous radii ratio R at any time t . With R known, the analysis can then be accomplished by following the steps outlined for the case $n = 1$. The creep failure time t_f is obtained by setting $R = 1$ in Equation (125) and is

$$t_f = \frac{1}{B} \left[\frac{-4n}{\varrho \omega^2 (b^2 - a^2)} \right]^n \int_{R_0}^1 \left[\frac{\beta^{(n+1)/n} \sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha^{(n+1)/n} \sqrt{\beta^2 - 1}}{2\sqrt{3} \sqrt{\alpha^2 - 1} \sqrt{\beta^2 - 1} + n(\sqrt{\alpha^2 - 1} + \sqrt{\beta^2 - 1})} \right]^n e^{nk} dk \quad (126)$$

8. Conclusion

The problem of conducting a creep analysis for a rotating cylinder made of a material creeping according to an n -power relationship between strain rate and stress has been studied and the complete solution for the creep failure time, deformations, strains, strain rates and stresses has been arrived at for the case when the creep exponent $n = 1$. The theory developed is perfectly general and by following procedures which have been outlined, it will be possible to obtain similar solutions for any value of the creep exponent and hence permit the analysis of cylinders constructed from any material exhibiting creep.

The theory which has been developed is based upon the best available information at the present time regarding creep and the behaviour of multiaxial stress systems. The true stress has been used and the use of the true strain results in the applicability of the analysis to strains of any magnitude from zero to infinity. To illustrate this particular point, a cylinder was chosen for analysis which underwent a change in the bore radius from 1.0 inch to 1.86 inches at the time investigated.

It should also be mentioned that the theory was developed in such a manner as to cover the entire range of possible cylinder wall thicknesses and that no simplifications were employed to treat a particular wall thickness range. The question of whether the cylinder under analysis is thin-, thick-, or very thick-walled thus becomes of no consequence as the solution is exact for each case. There are also no restrictions as to the magnitude of the inner and outer radii, the material density or the speed, and when the theory is extended to all values of n , there will be no restrictions upon the material itself as long as it is isotropic and homogeneous and as long as its creep behaviour can adequately be represented by an n -power relation.

Bibliography

- [1] E. OROWAN, Mechanical Testing of Solids, in: The Principles of Rheological Measurements, British Rheologists Club, London 1949, Thomas Nelson and Sons Ltd.
- [2] N. J. HOFF, The Necking and the Rupture of Rods Subjected to Constant Tensile Loads, J. Appl. Mech. 20, Trans. ASME 75 (1953), S. 105—108.
- [3] F. RIMROTT, Versagenszeit beim Kriechen, Ing.-Arch. 27 (1959), S. 169—178.
- [4] F. P. J. RIMROTT, E. J. MILLS and J. MARIN, Prediction of Creep Failure Time for Pressure Vessels, J. Appl. Mech. 27 (1960), S. 303—307.
- [5] S. TIMOSHENKO, Strength of Materials, Part. 2, 3rd Edition, D. Van Nostrand Co. Inc. New York 1956.

Manuskripteingang: 19. 11. 1960

Anschriften: Prof. Dr. F. P. J. RIMROTT, Department of Mechanical Engineering, University of Toronto, Toronto 5, Ontario, Canada

J. R. LUKE, M. A. Sc., 256 Winona Drive, Toronto, Ontario, Canada

Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates

By NOBORU YAMAKI

Für die nichtlinearen Biegeschwingungen dünner rechteckiger oder kreisförmiger Platten werden Näherungslösungen angegeben, wobei verschiedene Fälle von Randbedingungen betrachtet werden. Dabei wird der Einfluß großer Amplituden auf freie und erzwungene Schwingungen klargestellt.

Approximate solutions for the nonlinear bending vibrations of thin plates are presented for the cases of rectangular and circular plates subjected to various boundary conditions, and the effects of large amplitudes on both the free and forced vibrations are clarified.

Находится приближенное решение нелинейных вибраций тонких прямоугольных и круговых пластинок с разными краевыми условиями. Выясняется эффект больших амплитуд для свободных и вынужденных колебаний.

1. Introduction

A variety of important problems of structural strength and stability of plates, arising in modern aircraft construction, can not be adequately analyzed on the basis of the classical theory since the plate deflections experienced are not small in comparison with the plate thickness. In this case, the interaction between the membrane stresses and the curvature of the plate must be considered, which leads to nonlinear terms in the equations of equilibrium of the plate element. Among the theories taking into account the influence of large deflections, the most widely known is the static theory of VON KÁRMÁN, based on which various problems on the large deflection and postbuckling behavior of thin plates have been successfully investigated.

On the other hand, the dynamic behavior of plates subjected to intense acoustic loading has become a problem of increasing importance since the advent of turbojet engines, and several researches, both theoretical and experimental, have been conducted. For example, HERRMANN [1¹⁾] proposed the nonlinear plate theory of motion corresponding to the dynamic analogue of the VON KÁRMÁN theory, while ERINGEN [2] made a comprehensive study of the vibration of viscoelastic plates taking into account shear deformations as well as finite deflections. Recently, a new theory which is more general than that of HERRMANN was developed by TADJBAKHSI and SAIBEL [3]. Although the basic equations have been thus established, their applications to practical problems seem to be confined to only the special cases owing to the difficulty of the mathematical treatment. That is, CHU and HERRMANN [4] studied the influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular plates with hinged, immovable edges, by applying HERRMANN's theory. Approximate solutions for the nonlinear response of rectangular plates to sinusoidal acoustic pressure were obtained by KIRCHMAN and GREENSPON [5] by using the static load-deflection relations previously obtained. Experimental researches on the nonlinear forced vibrations of rectangular plates and rotating circular discs were made by LASSITER et al [6, 7] and TOBIAS [8], respectively.

In this paper, the extension of the work of CHU and HERRMANN is attempted. That is, based on the simplified plate theory of motion corresponding to the first order approximation to that of HERRMANN [1], free and forced vibrations of both the rectangular and circular plates are investigated under various boundary conditions. The corresponding static cases have been also treated for checking the accuracy of the solution. It is ascertained that the results here obtained compare favourably with those previously obtained.

In what follows, the rectangular and circular plates are treated separately. In each case, the basic equations and boundary conditions are first described and then the method of solution is given. Finally numerical solutions are presented and discussed.

2. Nonlinear Vibrations of Rectangular Plates

2.1 Basic Equations and Boundary Conditions

Under the assumption that the effect of both the longitudinal and rotatory inertia forces can be neglected, the basic equations governing the nonlinear vibration of plates subjected to sinusoidally varying pressure can be reduced to the following set of equations²⁾

$$\nabla^4 F = E (w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy}) \quad \dots \dots \dots (1),$$

$$L(w, F) \equiv D \nabla^4 w + \rho h w_{,tt} - h (F_{,yy} w_{,xx} + F_{,xx} w_{,yy} - 2 F_{,xy} w_{,xy}) - p \cos \omega t = 0 \quad (2).$$

¹⁾ Numbers in brackets refer to the references at the end of the paper.

²⁾ Subscripts following a comma stand for differentiation; e. g.,

$w_{,xy} = \partial^2 w / \partial x \partial y$, $F_{,yy} = \partial^2 F / \partial y^2$ etc.

These equations correspond to the first order approximation to those of HERRMANN [1] as stated in Reference [4]. In these equations, x, y are Cartesian coordinates; w denotes the plate deflection, h the plate thickness, ρ the density, t the time, $p \cos \omega t$ the exciting pressure, and $D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$ the bending stiffness where E and ν are YOUNG'S modulus and POISSON'S ratio, respectively. The operator ∇^4 is the iterated LAPLACE operator $\partial^4 / \partial x^4 + 2 \partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 / \partial y^4$. Further, F is the AIRY'S stress function defined by

$$F_{,yy} = \sigma_x, \quad F_{,xx} = \sigma_y, \quad -F_{,xy} = \tau_{xy} \quad \dots \quad (3),$$

where σ_x, σ_y and τ_{xy} are membrane stresses.

Now we will state the boundary conditions for the problems here treated, Fig. 1. There are boundary conditions for both the lateral displacement w and the stress function F . We will designate the former as supporting conditions and the latter as stress conditions.

For the supporting conditions, we will consider the following two cases, i. e., I: All edges simply supported, and II: all edges clamped. Thus we have

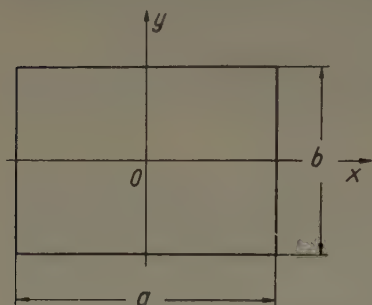


Fig. 1. Dimensions and coordinates of the rectangular plate

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm a/2, & y &= \pm b/2, \\ \text{I: } w &= w_{,xx} + \nu w_{,yy} = 0, & w &= w_{,yy} - \nu w_{,xx} = 0, \\ \text{II: } w &= w_{,x} = 0, & w &= w_{,y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4).$$

Concerning the stress conditions, we will treat the following three cases, i. e., (a): All edges stress free, (b): all edges immovable and (c): all edges movable. These conditions may be expressed as follows:

$$\begin{aligned} x &= \pm a/2, & y &= \pm b/2, \\ \text{(a): } F_{,yy} &= F_{,xy} = 0, & F_{,xx} &= F_{,xy} = 0 & \dots \quad (5a), \\ \text{(b): } u &= F_{,xy} = 0, & v &= F_{,xy} = 0 & \dots \quad (5b), \\ \text{(c): } P_x &= F_{,xy} = 0, & u &= \text{const.}, & P_y &= F_{,xy} = 0, & v &= \text{const.} & \dots \quad (5c). \end{aligned}$$

In these equations, u and v are mid-plane displacements, while P_x and P_y are resultant forces, in the x and y directions, respectively. These can be expressed by the following formulas.

$$u = \int_0^x \left[\frac{1}{E} (F_{,yy} - \nu F_{,xx}) - \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right] dx, \quad v = \int_0^y \left[\frac{1}{E} (F_{,xx} - \nu F_{,yy}) - \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right] dy \quad (6),$$

$$P_x = h \int_{-b/2}^{b/2} F_{,yy} dy, \quad P_y = h \int_{-a/2}^{a/2} F_{,xx} dx \quad \dots \quad (7).$$

As seen from Equation (5c), we mean by "movable edges" the edges which are kept straight by a distribution of normal stresses, the resultant of which is zero.

The problem consists in determining the functions w and F which satisfy the basic equations, together with the prescribed boundary conditions.

2.2 Method of Solution

For obtaining approximate solutions, we first assume the deflections in Cases I and II as

$$\left. \begin{aligned} \text{I: } w &= h \psi(t) \cos(\pi/a) x \cos(\pi/b) y, \\ \text{II: } w &= h \psi(t) \cos^2(\pi/a) x \cos^2(\pi/b) y \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (8),$$

where $\psi(t)$ is a function of time alone, which is to be determined later. These expressions obviously satisfy the related supporting conditions. Here it will be noted that the maximum value of $\psi(t)$ coincides with the maximum deflection w_m divided by plate thickness h , which will be denoted by \bar{w}_m . Thus

$$[\psi(t)]_{\max} = w_m / h = \bar{w}_m \quad \dots \quad (9).$$

Substituting Expressions (8) into Equation (1) and letting

$$F = f \cdot \psi^2(t) \quad \dots \quad (10),$$

the results may be expressed as

$$\nabla^4 f = \frac{\pi^4 E h^4}{a^2 b^2} \sum_p \sum_q D_{pq} X_{2p} Y_{2q}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (11),$$

where we have used the abbreviations

$$X_{2p} = \cos(2p\pi/a) x, \quad Y_{2q} = \cos(2q\pi/b) y \quad \dots \quad (12).$$

The general solution, f , of Equation (11) is given by a sum of the complementary function, f_0 , and a particular integral, f_1 , i. e.,

$$f = f_0 + f_1 \dots \dots \dots (13),$$

and f_1 may be expressed as

$$f_1 = E h^2 \sum_p \sum_q \varphi_{pq} X_{2p} Y_{2q} \dots \dots \dots (14),$$

where

$$\varphi_{pq} = \beta^2 D_{pq} / 16 (p^2 + \beta^2 q^2)^2, \quad \beta = a/b \dots \dots \dots (15).$$

Performing calculations, the nonzero coefficients φ_{pq} in each case are obtained as

$$\left. \begin{array}{l} \text{I: } \varphi_{01} = -1/32 \beta^2, \quad \varphi_{10} = -\beta^2/32, \\ \text{II: } \varphi_{01} = -1/32 \beta^2, \quad \varphi_{10} = -\beta^2/32, \quad \varphi_{11} = -\beta^2/16 (1 + \beta^2)^2, \quad \varphi_{02} = -1/512 \beta^2, \\ \quad \varphi_{20} = -\beta^2/512, \quad \varphi_{12} = -\beta^2/32 (1 + 4\beta^2)^2, \quad \varphi_{21} = -\beta^2/32 (4 + \beta^2)^2 \end{array} \right\} (16).$$

It will be easily seen that f_1 thus obtained is an even function in x and y , with vanishing shearing stresses along the boundaries.

Noting that f_0 must have the same properties as stated above, we express f_0 as [9]

$$\begin{aligned} f_0 = & \frac{1}{2} p_x y^2 + \frac{1}{2} p_y x^2 \\ & + E h^2 \sum_{n=1,2,\dots} \left\{ \frac{A_n}{n^2 \left(\sinh \frac{n\pi}{\beta} \cosh \frac{n\pi}{\beta} + \frac{n\pi}{\beta} \right)} \left[\left(\sinh \frac{n\pi}{\beta} + \frac{n\pi}{\beta} \cosh \frac{n\pi}{\beta} \right) \cosh \frac{2n\pi}{a} y \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2n\pi}{a} y \sinh \frac{n\pi}{\beta} \sinh \frac{2n\pi}{a} y \right] \cos \frac{2n\pi}{a} x \right. \\ & \left. + \frac{B_n}{n^2 \beta^2 (\sinh n\pi\beta \cosh n\pi\beta + n\pi\beta)} \left[(\sinh n\pi\beta + n\pi\beta \cosh n\pi\beta) \cosh \frac{2n\pi}{b} x \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2n\pi}{b} x \sinh n\pi\beta \sinh \frac{2n\pi}{b} x \right] \cos \frac{2n\pi}{b} y \right\} \dots \dots \dots (17), \end{aligned}$$

where p_x , p_y , A_n and B_n are unknown constants. Substituting the expressions of w and F thus obtained in Equations (5b) and (5c), we obtain for Case (b)

$$A_n = B_n = 0, \quad p_x = C \cdot \frac{1 + \nu \beta^2}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\pi^2 E h^2}{a^2}, \quad p_y = C \cdot \frac{\beta^2 + \nu}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\pi^2 E h^2}{a^2} \quad (18),$$

where values of C are 1/8 and 3/32 for Cases I and II, respectively, while for Case (c), we have

$$A_n = B_n = p_x = p_y = 0 \dots \dots \dots (19).$$

For Case (a), we first observe that

$$\left. \begin{aligned} [f_{0,yy}]_{x=\pm a/2} &= p_x - \frac{4\pi^2 E h^2}{a^2} \sum_n \left[(-1)^n A_n \xi \left(\frac{n}{\beta}, \frac{2y}{b} \right) + B_n Y_{2n} \right], \\ [f_{0,xx}]_{y=\pm b/2} &= p_y - \frac{4\pi^2 E h^2}{a^2} \sum_n \left[A_n X_{2n} + (-1)^n B_n \xi \left(n\beta, \frac{2x}{a} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (20),$$

where

$$\xi(\gamma, z) = \frac{(\sinh \gamma \pi - \gamma \pi \cosh \gamma \pi) \cosh \gamma \pi z + \gamma \pi z \sinh \gamma \pi \sinh \gamma \pi z}{\sinh \gamma \pi \cosh \gamma \pi + \gamma \pi} \dots \dots (21).$$

Expanding the function $\xi(\gamma, z)$ in a FOURIER series in the interval $-1 \leq z \leq 1$, we obtain

$$\xi(\gamma, z) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \eta(\gamma, m) \cos m\pi z, \quad \eta(\gamma, m) = \frac{4(-1)^m \gamma m^2}{\pi(\gamma^2 + m^2)^2} \cdot \frac{\sinh^2 \gamma \pi}{\sinh \gamma \pi \cosh \gamma \pi + \gamma \pi} \quad (22),$$

and then Equations (20) become

$$\left. \begin{aligned} [f_{0,yy}]_{x=\pm a/2} &= p_x - \frac{4\pi^2 E h^2}{a^2} \sum_n \left[B_n + \sum_m (-1)^m A_m \eta \left(\frac{m}{\beta}, n \right) \right] Y_{2n}, \\ [f_{0,xx}]_{y=\pm b/2} &= p_y - \frac{4\pi^2 E h^2}{a^2} \sum_n \left[A_n + \sum_m (-1)^m B_m \eta(m\beta, n) \right] X_{2n} \end{aligned} \right\} \dots \dots (23).$$

Therefore, in this case, we have from Equations (5a) the conditions $p_x = p_y = 0$, together with a set of the following equations for the determination of A_n and B_n :

$$\left. \begin{aligned} B_n + \sum_m (-1)^m A_m \eta \left(\frac{m}{\beta}, n \right) &= -n^2 \beta^2 \sum_p (-1)^p \varphi_{pn}, \\ A_n + \sum_m (-1)^m B_m \eta(m\beta, n) &= -n^2 \sum_q (-1)^q \varphi_{nq} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24).$$

$$m, n = 1, 2, 3 \dots, \quad p, q = 0, 1, 2 \dots$$

To facilitate the calculation hereafter, we rewrite the function f_0 for Case (a) in the following double FOURIER series

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= E h^2 \sum_p \sum_q \varphi'_{pq} X_{2p} Y_{2q}, \\ \varphi'_{pq} &= \frac{4\beta}{\pi(p^2 + \beta^2 q^2)^2} \left[\frac{p(-1)^q \varepsilon_q \sinh^2 \frac{p\pi}{\beta}}{\sinh \frac{p\pi}{\beta} \cosh \frac{p\pi}{\beta} + \frac{p\pi}{\beta}} A_p + \frac{q(-1)^p \varepsilon_p \sinh^2 q\pi\beta}{\sinh q\pi\beta \cosh q\pi\beta + q\pi\beta} B_q \right], \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25),$$

$$p, q = 0, 1, 2 \dots$$

where $\varepsilon_0 = 1/2$ and $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 1$. Hence, the stress function f in each case may be generally expressed as

$$f = F/\psi^2(l) = \frac{1}{2} p_x y^2 + \frac{1}{2} p_y x^2 + E h^2 \sum_p \sum_q \Phi_{pq} X_{2p} Y_{2q} \dots \dots \dots (26).$$

It is evident that for Case (a), $p_x = p_y = 0$, $\Phi_{pq} = \varphi_{pq} + \varphi'_{pq}$; for Case (b), p_x and p_y are given by Equations (18), $\Phi_{pq} = \varphi_{pq}$; while for Case (c), $p_x = p_y = 0$, and $\Phi_{pq} = \varphi_{pq}$.

We have thus obtained the expressions for w and F satisfying the boundary conditions as well as the first of basic equations. With these expressions, however, it is obvious that the second of the basic equations, Equation (2), can not be exactly satisfied. Hence, instead of Equation (2), we impose the following requirement on the functions w and F

$$\int_0^{a/2} \int_0^{b/2} L(w, F) w \, dx \, dy = 0 \dots \dots \dots (27),$$

from which we will obtain an ordinary differential equation for the determination of $\psi(t)$. The above condition implies that the virtual work, as a whole, vanishes at every instant. It is easy to see that, for the static case where $\psi(t)$ is an unknown constant, this method reduces to the one-term approximation of the GALERKIN's method.

Inserting the expressions for w and F in Equation (27) and integrating, we obtain the following nonlinear differential equations in each case.

$$\left. \begin{aligned} \text{I :} \quad & \varrho h^2 \psi_{,tt} + \frac{\pi^4 D h}{a^4} (1 + \beta^2) \psi + \frac{\pi^2 h^2}{a^2} (p_x + \beta^2 p_y) \psi^3 \\ & - \frac{2\pi^4 E h^4}{a^2 b^2} (\Phi_{01} + \Phi_{10}) \psi^3 = \frac{16}{\pi^2} p \cos \omega t, \\ \text{II :} \quad & \varrho h^2 \psi_{,tt} + \frac{16\pi^4 D h}{9 a^4} (3 + 2\beta^2 + 3\beta^4) \psi + \frac{4\pi^2 h^2}{3 a^2} (p_x + \beta^2 p_y) \psi^3 \\ & - \frac{32\pi^4 E h^4}{9 a^2 b^2} \left(\Phi_{01} + \Phi_{10} + \Phi_{11} + \frac{1}{2} \Phi_{12} + \frac{1}{2} \Phi_{21} + \Phi_{02} + \Phi_{20} \right) \psi^3 = \frac{16}{9} p \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28).$$

Solving these equations for $\psi(t)$, both the functions w and F will be determined and the problem is solved.

2.3 Numerical Solutions for the Square Plate

For the square plate, i. e., $\beta = 1$, Equations (28) become

$$\left. \begin{aligned} \text{I :} \quad & \varrho h^2 \psi_{,tt} + \frac{\pi^4 E h^4}{a^4} \left[\frac{1}{3(1-\nu^2)} \psi + \zeta_1 \psi^3 \right] = \frac{16}{\pi^2} p \cos \omega t, \\ \text{II :} \quad & \varrho h^2 \psi_{,tt} + \frac{16\pi^4 E h^4}{9 a^4} \left[\frac{2}{3(1-\nu^2)} \psi + \zeta_2 \psi^3 \right] = \frac{16}{9} p \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29).$$

In these equations, values of ζ_1 are 0.06492, $(3 - \nu)/8(1 + \nu)$ and $1/8$, while those of ζ_2 are 0.14903, $0.16656 + (0.14063)/(1 - \nu)$ and 0.16656, for the stress conditions (a), (b) and (c), respectively. In calculating A_n and B_n for Case (a) by Equations (24), we have taken n from 1 to 8. Now we will first treat the static case for checking the solution, and then proceed to evaluate the effect of large amplitudes on the free and forced vibrations.

(i) Static Deflection

Letting $\psi_{,tt} = 0$ and $\cos \omega t = 1$ in Equations (29) and recalling Relation (9), we have the expressions for the static maximum deflections in each case as

$$\left. \begin{aligned} \text{I :} \quad & \frac{p a^4}{E h^4} = \frac{\pi^6}{16} \left[\frac{1}{3(1-\nu^2)} \bar{w}_m + \zeta_1 \bar{w}_m^3 \right], \\ \text{II :} \quad & \frac{p a^4}{E h^4} = \pi^4 \left[\frac{2}{3(1-\nu^2)} \bar{w}_m + \zeta_2 \bar{w}_m^3 \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30).$$

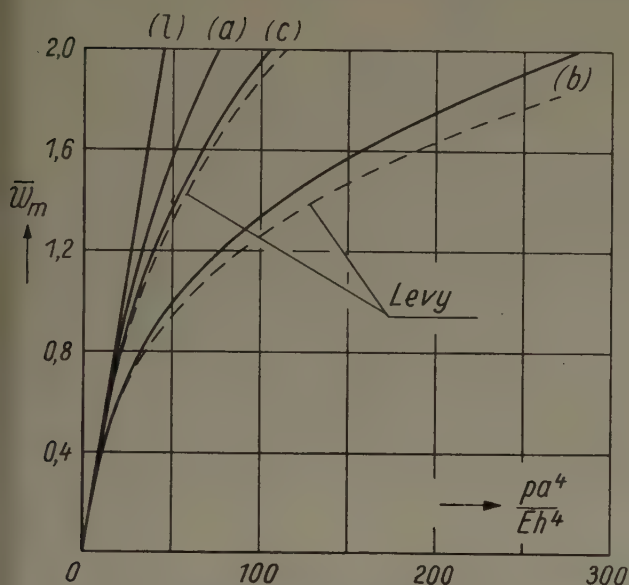


Fig. 2(a). Maximum deflection of square plates with simply supported edges; $\nu = 0.316$

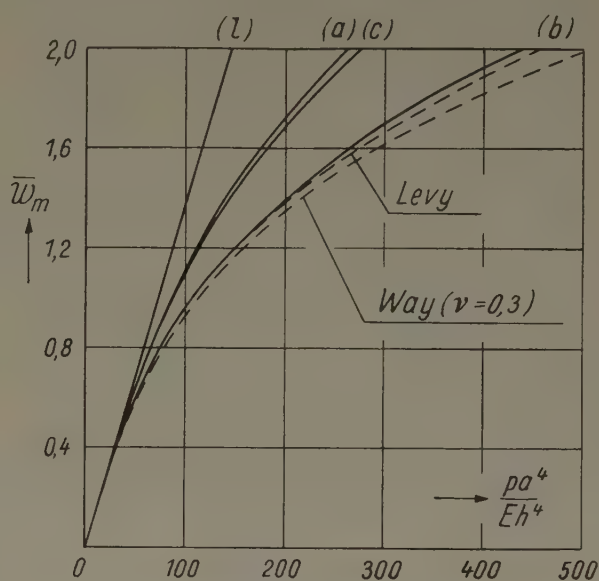


Fig. 2(b). Maximum deflection of square plates with clamped edges; $\nu = 0.316$, not otherwise specified

The numerical results are illustrated in Figs. 2(a) and 2(b). In these figures, (a), (b) and (c) specify the stress conditions previously defined, while (l) designates the corresponding linear solutions [10]. Some of the problems here considered have been solved more accurately by LEVY [11, 12] and WAY [13], which are shown together by dashed curves. Poisson's ratio ν is taken as 0.316 except for the WAY's solution where $\nu = 0.3$. It will be seen that in spite of a rough approximation, the present solutions are in reasonable agreement with those previously obtained.

(ii) Free Vibration

The equation for the free vibration of square plates is obtained in the following form by putting $p = 0$ in Equations (29):

$$\psi_{,tt} + \alpha^2 \psi + \mu^2 \psi^3 = 0 \quad \dots \dots \dots (31).$$

For vibrations with small amplitudes, the term $\mu^2 \psi^3$ can be neglected in comparison with $\alpha^2 \psi$ and the equation becomes linear. The corresponding natural circular frequency is given by α , which becomes $(2\pi^2/a^2)\sqrt{D/\rho h}$ for the simply supported square plate. This value precisely coincides with that from the linear theory [14]. For the clamped square plate, α becomes $(37.22/a^2)\sqrt{D/\rho h}$, which gives 3.5% larger value than the accurate one [15].

Assuming that the amplitude of the vibration ψ is equal A , and it occurs at $t = 0$, the solution of Equation (31) will be given in the form of an elliptic cosine cn

$$\psi = A \operatorname{cn}(\lambda t, k) \quad \dots \dots \dots (32).$$

where

$$\lambda = (\alpha^2 + \mu^2 A^2)^{1/2}, \quad k = [\mu^2 A^2 / 2(\alpha^2 + \mu^2 A^2)]^{1/2} \quad \dots \dots \dots (33).$$

The period T of $cn(\lambda t, k)$ is

$$T = 4K/\lambda \quad (34),$$

where $K(k)$ is the complete elliptic integral of the first kind. The corresponding linear period, T_0 , is

$$T_0 = 2\pi/\alpha \quad (35),$$

which may be deduced from Equation (34) by observing that as $A \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \alpha$ and $K \rightarrow \pi/2$. The ratio T/T_0 is given by

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2\alpha K}{\pi\sqrt{\alpha^2 + \mu^2 A^2}} \quad (36).$$

In Figs. 3(a) and 3(b), this ratio is plotted versus the dimensionless amplitude \bar{w}_m , assuming that $\nu = 0.3$. The meaning of the symbols in the figures is the same as before. It will be seen that in each case, the period decreases with increasing amplitude and that this tendency is most pronounced for the plate with simply supported, immovable edges.

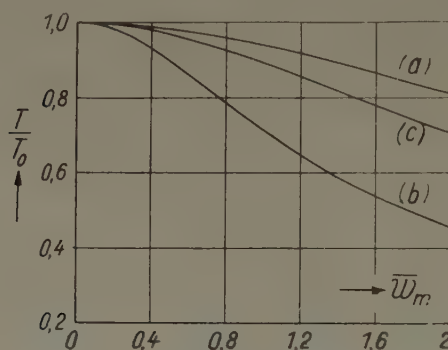


Fig. 3(a). Period of vibration of square plates with simply supported edges; $\nu = 0.3$

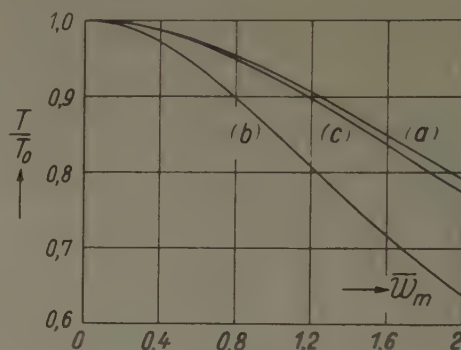


Fig. 3(b). Period of vibration of square plates with clamped edges; $\nu = 0.3$

CHU and HERRMANN [4] have studied the influence of large amplitudes on free vibrations of rectangular plates with simply supported, immovable edges, by using a perturbation method. In this case, we obtain from Equations (28)

$$\rho h^2 \psi_{,tt} + \frac{\pi^4 D h}{a^4} (1 + \beta^2)^2 \psi + \frac{3\pi^4 D h}{4a^4} [(3 - \nu^2)(1 + \beta^4) + 4\nu\beta^2] \psi^3 = 0 \quad (37),$$

which is ascertained to be precisely equivalent to the fundamental equation, Equation (20) of Reference [4].

Here, it is to be noted that the following approximate formulas [16] give satisfactory results for values of A less than $|\mu/\alpha|$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= \frac{\alpha}{\lambda} = \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\mu^2}{\alpha^2} A^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \psi(t) &= A \cos \alpha' t + \frac{\mu^2 A^3}{32 \alpha'^2} (\cos 3\alpha' t - \cos \alpha' t) \end{aligned} \right\} \quad (38).$$

(iii) Forced Vibration

Equations (29) may be generally expressed as

$$\psi_{,tt} + \alpha^2 \psi + \mu^2 \psi^3 = P \cos \omega t \quad (39),$$

which is the well-known DUFFING's equation. The approximate stationary solutions are given by [17]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2}{\alpha^2} &= 1 + \frac{3}{4} \frac{\mu^2}{\alpha^2} A^2 - \frac{P}{A \alpha^2}, \\ \psi(t) &= A \cos \omega t + \frac{\mu^2 A^3}{32 \left(\alpha^2 + \frac{3}{4} \mu^2 A^2 - \frac{P}{A}\right)} \cos 3\omega t \end{aligned} \right\} \quad (40),$$

where A is, as seen in the second of these equations, the amplitude of the component with the circular frequency ω .

By using Equations (40) together with Equations (29) and (39), the response of each square plate to the harmonic exciting pressure can be determined without difficulty. For example, the result for Case I(b) is shown in Fig. 4, where $|A|$ denotes the absolute value of A . The Poisson's ratio ν has been taken as 0.3. In the figure, the thick curve represents the free vibration, while dashed curves correspond to unstable motions. Similar results are obtained for the square plates under different boundary conditions. From Fig. 4, it will be seen that when damping forces are present, the so-called jump phenomena are expected to occur, which have been observed experimentally by KIRCHMAN and GREENSPON [5], and LASITER et al [6, 7].

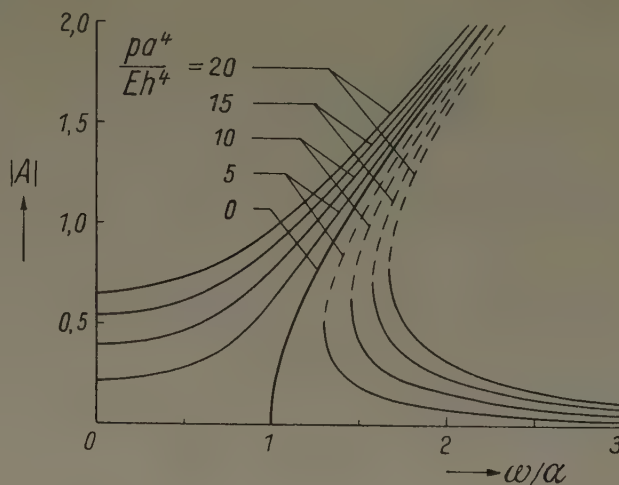


Fig. 4. Frequency response of the square plate with simply supported, immovable edges; $\nu = 0.3$

3. Nonlinear Vibrations of Circular Plates

3.1 Basic Equations and Boundary Conditions

Transforming the preceding basic equations, Equations (1) and (2), in the polar coordinates and noting the axial symmetry of the fundamental mode of the vibration of circular plates, we obtain

$$\nabla^4 F = -\frac{E}{r} w_{,r} w_{,rr} \quad \dots \quad (41),$$

$$L'(w, F) \equiv D \nabla^4 w + \rho h w_{,tt} - \frac{h}{r} (F_{,r} w_{,r})_{,r} - p \cos \omega t = 0 \quad \dots \quad (42),$$

where

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \quad \dots \quad (43).$$

Both the functions w and F are evidently independent of θ . The connections of the membrane stresses with the stress function and midplane displacements are given by

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} F_{,r} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(u_{r,r} + \frac{1}{2} w_{,r}^2 + \frac{\nu}{r} u_r \right), \\ \sigma_\theta &= F_{,rr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} u_r + \nu u_{r,r} + \frac{\nu}{2} w_{,r}^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (44),$$

where u_r is the radial displacement. Tangential displacement and shearing stress are identically zero from the assumption of axial symmetry.

Now we will state the boundary conditions for the problems here considered, Fig. 5. For the supporting conditions, we consider the following two cases as before, i. e., I: Simply supported and II: clamped. Thus we have, at $r = R$:

$$\left. \begin{aligned} \text{I:} \quad & w = w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} = 0, \\ \text{II:} \quad & w = w_{,r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (45).$$

As to the stress conditions, we will treat the two cases where the edges are free from stresses and constrained immovable. Designating these cases by (a) and (b) as before and noting, from Equations (44), that

$$E u_r = r (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad \dots \quad (46),$$

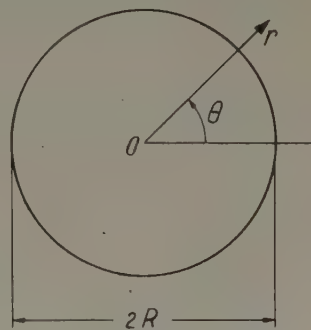


Fig. 5. Dimensions and coordinates of the circular plate

we have the following conditions at $r = R$:

$$\left. \begin{aligned} \text{(a) :} & \quad F_{,r} = 0, \\ \text{(b) :} & \quad F_{,rr} - \frac{\nu}{r} F_{,r} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (47).$$

The problem consists in finding the solutions w and F of the basic equations under the given boundary conditions.

3.2 Method of Solution

To obtain approximate solutions, we assume the deflections in each case as

$$w = h \psi(t) \left[1 + C_1 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + C_2 \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] \dots \dots \dots (48),$$

where $\psi(t)$ is a function of t alone, while C_1 and C_2 in each case are given by

$$\left. \begin{aligned} \text{I :} & \quad C_1 = -\frac{6+2\nu}{5+\nu}, \quad C_2 = \frac{1+\nu}{5+\nu}, \\ \text{II :} & \quad C_1 = -2, \quad C_2 = 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49).$$

It is easy to see that the above expressions satisfy the related boundary conditions, and that

$$[\psi(t)]_{\max} = \bar{w}_m \dots \dots \dots (50).$$

Substituting Expression (48) into Equation (41) and letting

$$F = f \cdot \psi^2(t) \dots \dots \dots (51),$$

the solution of the resulting equation may be expressed as

$$f = -E h^2 \left[C_3 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1}{16} C_1^2 \left(\frac{r}{R} \right)^4 + \frac{1}{18} C_1 C_2 \left(\frac{r}{R} \right)^6 + \frac{1}{48} C_2^2 \left(\frac{r}{R} \right)^8 \right] \dots \dots \dots (52),$$

where C_3 is an unknown constant. Inserting this equation into Conditions (47), we obtain C_3 in each case as

$$\left. \begin{aligned} \text{(a) :} & \quad C_3 = -\frac{1}{24} (3 C_1^2 + 4 C_1 C_2 + 2 C_2^2), \\ \text{(b) :} & \quad C_3 = -\frac{1}{24(1-\nu)} [3(3-\nu) C_1^2 + 4(5-\nu) C_1 C_2 + 2(7-\nu) C_2^2] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (53).$$

With these expressions of w and F thus obtained, we impose the following requirement instead of Equation (42) as before:

$$\int_0^R L'(w, F) w r dr = 0 \dots \dots \dots (54).$$

Taking $\nu = 0.3$ and performing integration, we have the differential equations for $\psi(t)$ in each case as

$$\left. \begin{aligned} \text{I :} & \quad \varrho h^2 \psi_{,tt} + \frac{E h^4}{R^4} (2.242 \psi + \zeta_3 \psi^3) = 1.560 p \cos \omega t, \\ \text{II :} & \quad \varrho h^2 \psi_{,tt} + \frac{E h^4}{R^4} (9.768 \psi + \zeta_4 \psi^3) = \frac{5}{3} p \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (55),$$

where values of ζ_3 are 0.591 and 4.148, while those of ζ_4 are 1.429 and 4.602, for the stress conditions (a) and (b), respectively.

3.3 Numerical Solutions for the Circular Plate

(i) Static Deflection

Letting $\psi_{,tt} = 0$ and $\cos \omega t = 1$ in Equations (55) and recalling Relation (50), we have the following equations for the maximum deflections in each case.

$$\frac{p R^4}{E h^4} = \left\{ \begin{aligned} 1.438 \bar{w}_m + 0.3789 \bar{w}_m^3 & \quad \text{for Case I(a),} \\ 1.438 \bar{w}_m + 2.659 \bar{w}_m^3 & \quad \text{for Case I(b),} \\ 5.861 \bar{w}_m + 0.8571 \bar{w}_m^3 & \quad \text{for Case II(a),} \\ 5.861 \bar{w}_m + 2.761 \bar{w}_m^3 & \quad \text{for Case II(b)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (56).$$

The corresponding approximate solutions obtained by TIMOSHENKO [18] for the same value of ν are

$$\frac{p R^4}{E h^4} = \begin{cases} 1.437 \bar{w}_m + 0.3764 \bar{w}_m^3 & \text{for Case I(a),} \\ 1.437 \bar{w}_m + 2.661 \bar{w}_m^3 & \text{for Case I(b),} \\ 5.848 \bar{w}_m + 0.8538 \bar{w}_m^3 & \text{for Case II(a),} \\ 5.848 \bar{w}_m + 2.754 \bar{w}_m^3 & \text{for Case II(b).} \end{cases} \quad (57),$$

which may be seen to be in excellent agreements with the present solutions. Further, solutions of exact nature have been obtained by STIPPES and HAUSRATH [19] for Case I(a), while by WAY [20] for Case II(b), which are ascertained to be in reasonable agreement with the present ones.

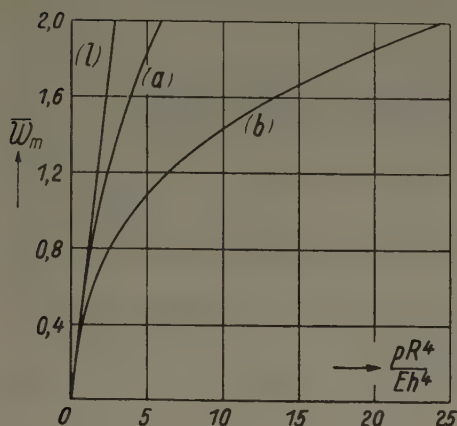


Fig. 6(a). Maximum deflection of circular plates with simply supported edges; $\nu = 0.3$

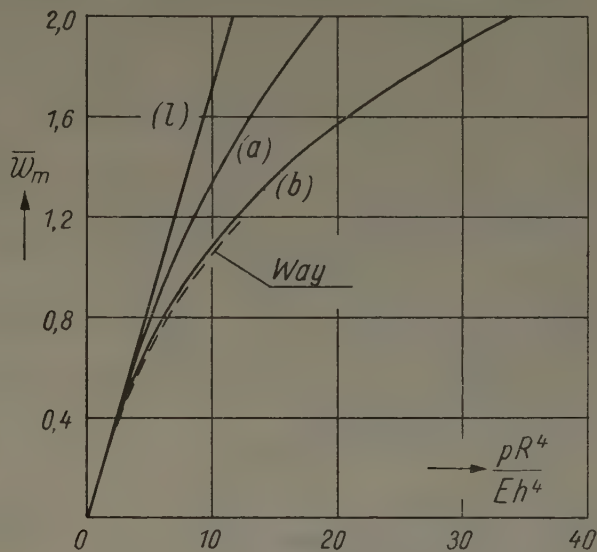


Fig. 6(b). Maximum deflection of circular plates with clamped edges; $\nu = 0.3$

Numerical results are illustrated in Figs. 6(a) and (6b), together with the previous solutions³⁾ as well as linear ones [21].

(ii) Free Vibration

Putting $p = 0$ in Equations (55) gives the equations for the free vibration having the same form as Equation (31). The linear natural frequencies, i. e., α , in each case become

$$\alpha = \begin{cases} 1.497 \frac{h}{R^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} & \text{for Case I,} \\ 3.125 \frac{h}{R^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} & \text{for Case II} \end{cases} \quad (58),$$

which are found to be 0.2% and 1% larger than the corresponding exact one [22], respectively.

The influence of large amplitudes on the period of free vibration can be obtained by the same procedure as before. The results are presented in Fig. 7. It may be seen that this effect is greatest for Case I(b) as in the preceding case for square plates.

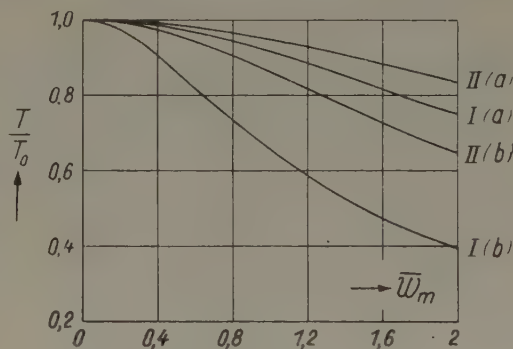


Fig. 7. Period of vibration of circular plates; $\nu = 0.3$

(iii) Forced Vibration

Equations (55) are obviously in the same form as Equation (39); hence, the nonlinear response to the varying pressure will be obtained in the same manner as before.

Acknowledgment

The author wishes to express his thanks to Professor Emeritus S. HIGUCHI and Professor F. NUMACHI, Tōhoku University, for their invaluable advice during the course of the present study.

³⁾ The results obtained by TIMOSHENKO and STIPPES et al are not shown in the figures, as they are not distinguishable from the present solutions.

References

- [1] G. HERRMANN, Influence of Large Amplitudes on Flexural Motions of Elastic Plates, NACA Technical Note 3578, 1955.
- [2] A. C. ERINGEN, On the Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Plates, *J. Appl. Mech.* 22 (1955), pp. 563—567.
- [3] I. TADJBAKHS and E. SAIBEL, On the Large Elastic Deflections of Plates, *ZAMM* 40 (1960), S. 259—268.
- [4] H. N. CHU and G. HERRMANN, Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates, *J. Appl. Mech.* 23 (1956), pp. 532—540.
- [5] E. J. KIRCHMAN and J. E. GREENSPON, Nonlinear Response of Aircraft Panels in Acoustic Noise, *J. Acoust. Soc. Am.* 29 (1957), pp. 854—857.
- [6] L. W. LASSITER and R. W. HESS, Calculated and Measured Stresses in Simple Panels Subjected to Intense Random Acoustic Loading Including the Near Noise Field of a Turbojet Engine, NACA Report 1367, 1957.
- [7] L. W. LASSITER, R. W. HESS and H. H. HUBBARD, An Experimental Study of the Response of Simple Panels to Intense Acoustic Loading, *J. Aeron. Sci.* 24 (1957), pp. 19—24, 80.
- [8] S. A. TOBIAS, Nonlinear Forced Vibrations of Circular Discs, *Engineering* 186 (1958), pp. 51—56.
- [9] N. YAMAKI, Stress Distribution in a Rectangular Plate under a Pair of Concentrated Forces, *The Reports of the Institute of High Speed Mechanics, Tohoku University*, 8 (1957), pp. 1—12.
- [10] S. TIMOSHENKO and S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells*, 2nd Edition, New York 1959, McGraw-Hill Book Co., p. 108, 197.
- [11] S. LEVY, Bending of Rectangular Plates With Large Deflections, NACA Report No. 737, 1942.
- [12] S. LEVY, Square Plate With Clamped Edge Under Normal Pressure Producing Large Deflections, NACA Report No. 740, 1942.
- [13] S. WAY, Uniformly Loaded, Clamped, Rectangular Plates with Large Deflection, *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.* 1938, pp. 123—128.
- [14] S. TIMOSHENKO and D. H. YOUNG, *Vibration Problems in Engineering*, 3rd Edition, New York 1955, D. Van Nostrand Co., p. 443.
- [15] D. YOUNG, Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method, *J. Appl. Mech.* 17 (1950), pp. 448—453.
- [16] Ref. 14, p. 150.
- [17] J. J. STOKER, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, New York 1950, Interscience Publishers, p. 83.
- [18] Ref. 10, p. 410, Table 82.
- [19] M. STIPPES and A. H. HAUSRATH, Large Deflections of Circular Plates, *J. Appl. Mech.* 19 (1952), pp. 287 to 292.
- [20] S. WAY, Bending of Circular Plates With Large Deflection, *Trans. ASME* 56 (1934), pp. 627—636.
- [21] Ref. 10, p. 54.
- [22] J. PRESCOTT, *Applied Elasticity*, 1st Edition, London 1924, Longmans, Green and Company, pp. 597—598.

Manuskripteingang: 22. 12. 1960

Anschrift: NOBORU YAMAKI, Ass. Prof., Institute of High Speed Mechanics, Tohoku University, Sendai, Japan

KLEINE MITTEILUNGEN

Die Vergrößerung des Halbmessers eines durch Pole begrenzten Konvergenzkreises von Potenzreihen

Untersucht werden hier nur Potenzreihen, deren Konvergenzkreis durch endlich viele Pole begrenzt ist. In der Praxis kommt es oft vor, daß der Wert einer durch ihre Potenzreihe ausgedrückten Funktion in der Nähe der Pole, wo die Konvergenz stark abnimmt beziehungsweise ganz aufhört, zu berechnen ist. Zweck der vorliegenden Abhandlung ist es, den Radius r des Konvergenzkreises zu vergrößern.

Zu diesem Zweck sei folgendes Verfahren empfohlen:

Von der Funktion wird die Summe der zu den erwähnten Polen gehörenden Hauptteile [1] abgezogen. Diese neue Funktion besitzt auf der Kreislinie mit dem Radius r keine Singularität mehr, naturgemäß auch nicht innerhalb des Kreises. Infolgedessen ist der Konvergenzradius R der Potenzreihe der neuen Funktion größer als r .

Die Funktion wird mit $f(z)$ bezeichnet. Der Mittelpunkt ihres Konvergenzkreises sei c und sein Halbmesser r .

Ihre konvergierende Potenzreihe ist also

$$f(z) = a_0 + a_1(z-c) + \dots + a_n(z-c)^n + \dots \quad (1).$$

$$|z-c| < r$$

Die Pole sollen sich auf den Punkten p, s, \dots, t der Kreislinie mit dem Radius r befinden. Ihre Ordnungszahlen sollen π, σ, \dots, τ sein. Die Hauptteile der Funktion sind:

$$\varphi_p(z) = \frac{P_1}{z-p} + \frac{P_2}{(z-p)^2} + \dots + \frac{P_\pi}{(z-p)^\pi},$$

$$\varphi_s(z) = \frac{S_1}{z-s} + \frac{S_2}{(z-s)^2} + \dots + \frac{S_\sigma}{(z-s)^\sigma},$$

$$\dots$$

$$\varphi_t(z) = \frac{T_1}{z-t} + \frac{T_2}{(z-t)^2} + \dots + \frac{T_\tau}{(z-t)^\tau}.$$

Die Bezeichnung der Summe der Hauptteile ist

$$\varphi(z) = \varphi_p(z) + \varphi_s(z) + \dots + \varphi_t(z).$$

Diese Funktion ist rational. Singularitäten hat sie nur in den Punkten p, s, \dots, t der Kreislinie vom Radius r , sie kann also um das Zentrum c in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z-c) + \dots + b_n(z-c)^n + \dots$$

$$|z-c| < r.$$

Diese Gleichung wird von Gleichung (1) subtrahiert.

$$f(z) - \varphi(z) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(z-c) + \dots$$

$$+ (a_n - b_n)(z-c)^n + \dots$$

Wie oben bereits erwähnt wurde, hat diese Funktion keine Singularität auf der Kreislinie mit dem Radius r , ihr Konvergenzradius ist $R > r$. Somit ist

$$f(z) = \varphi(z) + (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(z-c) + \dots$$

$$+ (a_n - b_n)(z-c)^n + \dots \quad |z-c| < R \quad (2).$$

Die Funktion $f(z)$ wird also als die Summe einer rationalen gebrochenen Funktion und einer Potenzreihe ausgedrückt. Sie ist in jedem inneren Punkt des Kreisgebietes mit dem Zentrum c und dem Halbmesser R unter Ausschluß der Polpunkte p, s, \dots, t konvergent.

Beispiele

1.) Die um den Ursprung ($c=0$) entwickelte Potenzreihe der Funktion $f(z) = \sec z$ ist:

$$\sec z = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \dots \quad |z| < \frac{\pi}{2} \quad (3).$$

Die dem Ursprung am nächsten liegenden Pole der Funktion $\sec z$ sind $p = \frac{\pi}{2}$, $s = -\frac{\pi}{2}$, also ist $r = \frac{\pi}{2}$.

Die Summe der zu diesen Polen gehörenden Hauptteile ist

$$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + z} = \frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4} - z^2}.$$

Diese rationale gebrochene Funktion kann als geometrische Reihe folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4} - z^2} = \frac{4}{\pi} + \frac{16}{\pi^3}z^2 + \frac{64}{\pi^5}z^4 + \dots \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Durch Subtraktion von der Gleichung (3) ergibt sich

$$\sec z = \frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4} - z^2} + \left(1 - \frac{4}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{\pi^3}\right)z^2$$

$$+ \left(\frac{5}{24} - \frac{64}{\pi^5}\right)z^4 + \dots \quad |z| < \frac{3}{2}\pi \quad (4).$$

Der Konvergenzradius ist auf $R = \frac{3}{2}\pi$ gewachsen, da sich die jenseits $r = \frac{\pi}{2}$ gelegene nächste Singularität der Funktion $\sec z$ an den Punkten $\frac{3}{2}\pi$ und $-\frac{3}{2}\pi$ befindet.

Für manche praktischen Zwecke geben die ersten drei Glieder genügend genaue Resultate

$$\sec z = \frac{3,1416}{2,4674 - z^2} - 0,27324 - 0,016 z^2 \quad (5).$$

$$|z| < \frac{3}{2}\pi$$

In Polnähe ist der Nenner mit größerer Genauigkeit in Rechnung zu stellen.

Die Vergrößerung des Konvergenzhalbmessers auf $5\pi/2$ kann auf ähnliche Weise erfolgen und führt zu dem Ausdruck

$$\sec z = \frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4} - z^2} - \frac{3\pi}{9\pi^2 - z^2} + \left(1 + \frac{4}{3\pi} - \frac{4}{\pi}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{16}{27\pi^3} - \frac{16}{\pi^3}\right)z^2$$

$$+ \left(\frac{5}{24} + \frac{64}{243\pi^5} - \frac{64}{\pi^5}\right)z^4 + \dots \quad |z| < \frac{5}{2}\pi.$$

2.) Aus der Potenzreihe von $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$, ferner aus der Summe $\varphi(z) = \frac{2}{\frac{\pi^2}{4} - z^2}$ der zu den Polen $\pm \frac{\pi}{2}$ gehörenden Hauptteile folgt — ähnlich dem Beispiel 1.)

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z} = \frac{2}{\frac{\pi^2}{4} - z^2} + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{32}{\pi^4}\right)z^2$$

$$+ \left(\frac{2}{15} - \frac{128}{\pi^6}\right)z^4 + \dots \quad |z| < \frac{3}{2}\pi \quad (6),$$

beziehungsweise

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z} = \frac{2}{2,4674 - z^2} + 0,18943 + 0,00482 z^2 \quad (7).$$

$$|z| < \frac{3}{2} \pi \dots$$

Die nach den dreigliedrigen Formeln (5) und (6) berechneten Funktionswerte werden in der folgenden Tabelle mit den genauen Werten verglichen, wobei die vorigen in Klammern stehen. Die Werte von $(\operatorname{th} x)$ wurden aus der Formel (6) auf Grund der Beziehung $\frac{\operatorname{tg} i x}{i x} = \frac{\operatorname{th} x}{x}$ berechnet.

z	$(\sec z)$	$\sec z$	$\left(\frac{\operatorname{tg} z}{z}\right)$	$\frac{\operatorname{tg} z}{z}$	x	$\left(\frac{\operatorname{th} x}{x}\right)$	$\frac{\operatorname{th} x}{x}$
0	1	1	1	1	0	1	1
0,2	1,02034	1,02034	1,01355	1,01355	0,2	0,98688	0,98690
0,4	1,08573	1,08570	1,05698	1,05698	0,4	0,94987	0,94987
0,6	1,2117	1,2116	1,14020	1,14023	0,6	0,89506	0,89508
0,8	1,4357	1,4353	1,28697	1,28705	0,8	0,82997	0,83005
1,0	1,8517	1,8508	1,5572	1,5574	1,0	0,7614	0,7616
1,2	2,762	2,760	2,1426	2,1435	1,2	0,6943	0,6947
1,4	5,886	5,883	4,1405	4,1413	1,4	0,6317	0,6324
1,6	-34,241	-34,247	-21,3968	-21,3953	1,6	0,5749	0,5760

Anwendungen

Die kleinste kritische Kraft des Stabes in Bild 1 hat den Wert

$$P_k = \frac{\pi^2 E I}{l^2}.$$

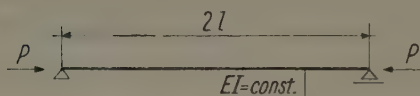


Bild 1

Auf den Stab wirkt eine Druckkraft $P < P_1$ ein. Es wird bei verschiedenen Querbelastungen das Verhältnis $\frac{M}{M_0}$ und $\frac{f}{f_0}$ des größten Biegemomentes und der größten Durchbiegung gesucht. Darin ist der Zähler das Moment beziehungsweise die Durchbiegung unter Mitwirkung einer Belastung P und der Nenner dasselbe für den Fall $P = 0$.

Mit der Bezeichnung $z = \sqrt{\frac{P l^2}{E I}}$ folgt

$$P = z^2 \frac{E I}{l^2} \dots \dots \dots (8).$$

Ferner sei die Knicksicherheit mit ν bezeichnet:

$$\nu = \frac{P_k}{P} = \frac{\pi^2}{4 z^2},$$

daraus folgt

$$z^2 = \frac{\pi^2}{4 \nu} \dots \dots \dots (9),$$

und

$$\frac{E I}{P l^2} = \frac{4}{\pi^2} \nu \dots \dots \dots (10).$$

Das Verhalten des Druckstabes bei Querbelastung läßt sich durch die Funktionen $\sec z$ und $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$ darstellen. Deshalb soll als Vorbereitung die oben angegebene Formel (9) für z^2 in die Gleichungen (4) und

(7) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} \sec z &= \frac{\pi}{\pi^2 - \frac{\pi^2}{4 \nu}} + \left(1 - \frac{4}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{\pi^3}\right) \frac{\pi^2}{4 \nu} \\ &\quad + \left(\frac{5}{24} - \frac{64}{\pi^5}\right) \frac{\pi^4}{16 \nu^2} \\ &\quad + \frac{4}{\pi} \\ &= \frac{\pi}{\nu - 1} + 1 + \left(\frac{\pi^2 - 4}{8 - \pi}\right) \frac{1}{\nu} + \left(\frac{5 \pi^4 - 4}{384 - \pi}\right) \frac{1}{\nu^2} \quad (11), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} z}{z} &= \frac{2}{\pi^2 - \frac{\pi^2}{4 \nu}} + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{32}{\pi^4}\right) \frac{\pi^2}{4 \nu} \\ &\quad + \left(\frac{2}{15} - \frac{128}{\pi^6}\right) \frac{\pi^4}{16 \nu^2} \\ &\quad + \frac{8}{\pi^2} \\ &= \frac{\pi^2}{\nu - 1} + 1 + \left(\frac{\pi^2 - 8}{12 - \pi^2}\right) \frac{1}{\nu} + \left(\frac{\pi^4 - 8}{120 - \pi^2}\right) \frac{1}{\nu^2} \\ &= \frac{0,81}{\nu - 1} + 1 + \frac{0,012}{\nu} + \frac{0,001}{\nu^2} \approx \frac{\nu - 0,19}{\nu - 1} \quad (12). \end{aligned}$$

I.) Der Stab in Bild 2 wird außer durch die Druckkraft noch durch eine zusätzliche gleichmäßig verteilte Last q belastet.

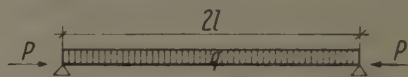


Bild 2

Das Biegemoment in der Stabmitte ist ohne Druckkraft $M_0 = \frac{1}{2} q l^2$, beim Vorhandensein einer Druckkraft [2]

$$M = q l^2 \frac{\sec z - 1}{z^2}.$$

Das Verhältnis der beiden Momente ist

$$\frac{M}{M_0} = 2 \frac{\sec z - 1}{z^2}.$$

Nach Gleichung (11) ist

$$\sec z - 1 = \frac{\frac{4}{\pi}}{\nu - 1} + \left(\frac{\pi^2 - 4}{8 - \pi}\right) \frac{1}{\nu} + \left(\frac{5 \pi^4 - 4}{384 - \pi}\right) \frac{1}{\nu^2},$$

nach Gleichung (9)

$$\frac{2}{z^2} = \frac{8}{\pi^2} \nu.$$

Das Produkt beträgt

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sec z - 1}{z^2} &= \frac{32}{\pi^2} \frac{\nu}{\nu - 1} + 1 - \frac{32}{\pi^2} + \left(\frac{5 \pi^3 - 32}{48 - \pi^3}\right) \frac{1}{\nu} \\ &= \frac{\nu + 0,032}{\nu - 1} - \frac{0,004}{\nu} \dots \dots \dots (13). \end{aligned}$$

Das zweite und die nachfolgenden Glieder werden vernachlässigt und damit wird

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\nu + 0,032}{\nu - 1}.$$

Somit nimmt in diesem Verhältnis das größte Biegemoment beim Vorhandensein einer Druckkraft noch zu, wenn die Knicksicherheit die Größe ν besitzt.

Ist die Axialkraft eine Zugkraft von der Größe H , so wird

$$\nu = -\frac{|H|}{P_k}.$$

Es sollen noch bei derselben Belastung die größten Durchbiegungen verglichen werden.

Ohne Druckkraft:

$$f_0 = \frac{5}{24} \frac{q l^2}{E I}.$$

Beim Vorhandensein einer Druckkraft P :

$$f = \frac{q l^2}{2 P} \left(\frac{2}{z^2} (\sec z - 1) - 1 \right) [2],$$

somit

$$\frac{f}{f_0} = \frac{12 E I}{l^2} \left(\frac{2}{z^2} (\sec z - 1) \right).$$

Nach der Gleichung (10) ist

$$\frac{12 E I}{5 P l^2} = \frac{48}{5 \pi^2} \nu$$

und nach der Gleichung (12)

$$\frac{2}{z^2} (\sec z - 1) = \frac{32}{\pi^2 \nu - 1} + \left(\frac{5 \pi^2}{48} - \frac{32}{\pi^2} \right) \frac{1}{\nu}.$$

Das Produkt beträgt

$$\frac{f}{f_0} = \frac{32 \cdot 48}{5 \pi^2} \frac{1}{\nu - 1} + 1 = \frac{\nu + 0,004}{\nu - 1}.$$

II.) Der Stab in Bild 3 wird außer durch die Druckkraft noch durch eine Querkraft Q in der Stabmitte belastet.



Bild 3

Die Biegemomente in der Stabmitte haben die Größe

$$M_0 = \frac{Q l}{2}, \quad M = \frac{Q l}{2} \frac{\operatorname{tg} z}{z} [2].$$

Bei Verwendung der Gleichung (12) ergibt sich

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\operatorname{tg} z}{z} = \frac{\nu - 0,19}{\nu - 1}.$$

Die Durchbiegungen in der Stabmitte sind

$$f_0 = \frac{Q l^3}{6 E I} \quad f = \frac{Q l}{2 P} \left(\frac{\operatorname{tg} z}{z} - 1 \right) [2].$$

Bei Beachtung der Gleichungen (9) und (11)

$$\frac{f}{f_0} = \frac{3 E I}{P l^2} \left(\frac{\operatorname{tg} z}{z} - 1 \right) = \frac{12 \nu}{\pi^2} \left[\frac{8}{\pi^2} + \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{8}{\pi^2} \right) \frac{1}{\nu} \right] = \frac{\nu - 0,014}{\nu - 1}.$$

F. DISCHINGER erzielte bei seiner Untersuchung von Druckstäben auf iterativem Wege dasselbe Resultat [3].

Es soll betont werden, daß die einfachen Formeln dieses Beispiels auch in der Umgebung der kritischen Kraft eine gute Näherung liefern, da der Konvergenzradius der mit den Hauptteilen ergänzten Potenzreihen größer geworden ist. Überdies tendiert der relative Fehler gerade in dieser Nachbarschaft gegen Null. Somit erscheint die in der Literatur zu findende Vorsichtsmaßregel unbegründet, derzufolge in der Nachbarschaft von $\nu = 1$ die angegebenen Formeln mit weiteren Gliedern, die die Potenzen $1/\nu$, $1/\nu^2$, ... enthalten, verschärft werden sollen.

So ist zum Beispiel im Falle von $\nu = 1,01$

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\nu + 0,032}{\nu - 1} = 104,2.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Vernachlässigung nur $-0,005$ ist.

Literatur

- [1] L. BIEBERBACH, Lehrbuch der Funktionentheorie, Band I, S. 140 bis 143.
- [2] Hütte, Band I, 28. Auflage, S. 936–937.
- [3] F. DISCHINGER, Untersuchungen über die Knickssicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken, Bauingenieur 39/40 (1937), S. 492–494.

Verfasser: JULIUS DÉRI, Budapest, IX., Kinizsi utca 11, Ungarn

Steady Temperature in a Composite Circular Cylinder

The method of finite HANKEL transforms is used for determining the steady temperature distribution in a finite circular cylinder consisting of any number of homogeneous and isotropic layers. A considerable part of what follows is new.

1. Statement of the Problem

The cylindrical body

$$0 \leq \varrho \leq r, \quad 0 \leq z \leq z_n$$

consists of n homogeneous and isotropic parts

$$0 \leq \varrho \leq r, \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k,$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad z_0 = 0,$$

with the conductivities λ_k , respectively. We have to find the steady temperature field in the body provided that its surfaces $z = 0$, $z = z_n$ are kept at prescribed temperatures $f(\varrho)$, $g(\varrho)$, whereas the curved surface $\varrho = r$ has steadily the temperature zero. The temperature and the heat flux are assumed to be continuous in the whole extent of the body in question.

Mathematically the problem reduces to finding the solution $u_k = u_k(\varrho, z)$, $1 \leq k \leq n$ of the equations

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_k}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = 0 \quad \dots (1.1),$$

$$0 \leq \varrho < r, \quad z_{k-1} < z < z_k, \quad 1 \leq k \leq n$$

$$u_1(\varrho, 0) = f(\varrho), \quad u_n(\varrho, z_n) = g(\varrho), \quad 0 \leq \varrho < r \quad (1.2),$$

$$\left. \begin{aligned} u_{k+1}(\varrho, z_k) &= u_k(\varrho, z_k), \\ 0 \leq \varrho < r, \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ \frac{\partial u_{k+1}}{\partial z} &= A_k \frac{\partial u_k}{\partial z}, \quad A_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}, \\ 0 \leq \varrho < r, \quad z = z_k, \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{aligned} \right\} \quad (1.3).$$

$$u_k(r, z) = 0, \quad z_{k-1} < z < z_k, \quad 1 \leq k \leq n \quad (1.4).$$

2. HANKEL Transforms of (1.1)–(1.4)

If we apply the familiar transformation [1]

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}(\varrho_i) &= H[h(\varrho)] = \int_0^r \varrho h(\varrho) J_0(\varrho_i \varrho) d\varrho, \\ h(\varrho) &= H^{-1}[\bar{h}(\varrho_i)] = \frac{2}{r^2} \sum_{(\varrho_i)} \bar{h}(\varrho_i) \frac{J_0(\varrho_i \varrho)}{J_1^2(\varrho_i r)} \end{aligned} \right\} \quad (2.1),$$

where the sum is taken over all the positive roots ϱ_i of the equation

$$J_0(\varrho_i r) = 0 \quad \dots (2.2)$$

then the above relations (1.1)–(1.4) change into the equations

$$\frac{d^2 \bar{u}_k}{dz^2} - \rho_i^2 \bar{u}_k = 0, \quad z_{k-1} < z < z_k, \quad 1 \leq k \leq n \quad (2.3),$$

$$\bar{u}_1(\rho_i, 0) = \bar{f}(\rho_i), \quad \bar{u}_n(\rho_i, z_n) = \bar{g}(\rho_i) \quad (2.4),$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{k+1}(\rho_i, z_k) &= \bar{u}_k(\rho_i, z_k), \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ \frac{d\bar{u}_{k+1}}{dz} &= A_k \frac{d\bar{u}_k}{dz}, \quad z = z_k, \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

for determining the HANKEL transforms

$$\begin{aligned} \bar{u}_k(\rho_i, z) &= H[u_k(\rho, z)] \\ &= \int_0^r \rho u_k(\rho, z) J_0(\rho_i \rho) d\rho, \quad 1 \leq k \leq n \quad (2.6), \end{aligned}$$

of the required functions $u_k(\rho, z)$; of course, $\bar{f}(\rho_i)$, $\bar{g}(\rho_i)$ mean the transforms of $f(\rho)$ and $g(\rho)$, respectively.

3. Solution of (2.3)–(2.5)

The equations (2.3) give generally

$$\bar{u}_k(\rho_i, z) = A_k \operatorname{ch} \rho_i(z - z_{k-1}) + B_k \operatorname{sh} \rho_i(z - z_{k-1}), \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.1),$$

and with these expressions we find from (2.4), (2.5) the linear set

$$A_1 = \bar{f}(\rho_i), \quad A_n \operatorname{ch} \rho_i l_n + B_n \operatorname{sh} \rho_i l_n = \bar{g}(\rho_i) \quad (3.2),$$

$$\left. \begin{aligned} A_{k+1} &= A_k \operatorname{ch} \rho_i l_k + B_k \operatorname{sh} \rho_i l_k, \\ B_{k+1} &= A_k (A_k \operatorname{sh} \rho_i l_k + B_k \operatorname{ch} \rho_i l_k), \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.3)$$

of equations for the unknown coefficients A_k , B_k ; the quantities l_k in (3.2), (3.3) are defined by

$$l_k = z_k - z_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.4).$$

The best way to solving the above system (3.2), (3.3) leads probably over the use of the matrix analysis — see [2], [3]. Introducing the matrices

$$\left. \begin{aligned} K_k &= \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n, \\ M_k &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \rho_i l_k & \operatorname{sh} \rho_i l_k \\ A_k \operatorname{sh} \rho_i l_k & A_k \operatorname{ch} \rho_i l_k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{aligned} \right\} \quad (3.5),$$

enables us to write the equations (3.3) in the form

$$K_{k+1} = M_k K_k, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

and this yields, with account of the first relation (3.2),

$$\left. \begin{aligned} K_{k+1} &= Q_k(\rho_i) \begin{pmatrix} \bar{f}(\rho_i) \\ B_1 \end{pmatrix}, \\ Q_k(\rho_i) &= M_k M_{k-1} \dots M_2 M_1, \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.6).$$

Denoting by $q_{n-1}^{(r,s)}(r, s = 1, 2)$ the elements of $Q_{n-1}(\rho_i)$ we find from the last of the equations (3.6)

$$\begin{aligned} A_n &= q_{n-1}^{(11)} \bar{f}(\rho_i) + q_{n-1}^{(12)} B_1, \\ B_n &= q_{n-1}^{(21)} \bar{f}(\rho_i) + q_{n-1}^{(22)} B_1, \end{aligned}$$

and combining this with the second condition (3.2) gives the value of B_1 in terms of ρ_i . All the other coefficients $A_k(\rho_i)$, $B_k(\rho_i)$ follow from (3.6).

On the whole, the solution of (3.2), (3.3) appears in the form

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \bar{f}(\rho_i), \\ B_1 &= \frac{1}{N(\rho_i)} [-Z(\rho_i) \bar{f}(\rho_i) + \bar{g}(\rho_i)], \\ \left\| \begin{pmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{pmatrix} \right\| &= \frac{Q_k(\rho_i)}{N(\rho_i)} \left\| \begin{pmatrix} \bar{f}(\rho_i) N(\rho_i) \\ -\bar{f}(\rho_i) Z(\rho_i) + \bar{g}(\rho_i) \end{pmatrix} \right\|, \\ N(\rho_i) &= q_{n-1}^{(12)} \operatorname{ch} \rho_i l_n + q_{n-1}^{(22)} \operatorname{sh} \rho_i l_n, \\ Z(\rho_i) &= q_{n-1}^{(11)} \operatorname{ch} \rho_i l_n + q_{n-1}^{(21)} \operatorname{sh} \rho_i l_n \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (3.7).$$

Substituting these expressions into (3.1) gives us the transforms $\bar{u}_k(\rho_i, z)$ of the required functions $u_k(\rho, z)$.

4. Solution of (1.1)–(1.4)

Having found, by means of (3.1) and (3.7), the HANKEL transforms $\bar{u}_k(\rho_i, z)$, it is quite easy to get the solution of our beginning problem. This happens by means of the second formula (2.1) which gives

$$\begin{aligned} u_k(\rho, z) &= \frac{2}{r^2} \sum_{(\rho_i)} [A_k \operatorname{ch} \rho_i(z - z_{k-1}) \\ &\quad + B_k \operatorname{sh} \rho_i(z - z_{k-1})] \frac{J_0(\rho_i \rho)}{J_1^2(\rho_i r)}, \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.1); \end{aligned}$$

the coefficients $A_k = A_k(\rho_i)$, $B_k = B_k(\rho_i)$ are determined by (3.7) and the sum is taken over all the positive roots ρ_i of the characteristic equation (2.2).

5. A Homogeneous Cylinder

As a first example we shall treat the case

$$A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = 1$$

corresponding to a homogeneous isotropic cylinder $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq z \leq z_n$.

The matrices $Q_k(\rho_i)$ become

$$Q_k(\rho_i) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \rho_i z_k & \operatorname{sh} \rho_i z_k \\ \operatorname{sh} \rho_i z_k & \operatorname{ch} \rho_i z_k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

and the formulae (3.7) give

$$\begin{aligned} N(\rho_i) &= \operatorname{sh} \rho_i z_n, \quad Z(\rho_i) = \operatorname{ch} \rho_i z_n, \\ A_k \operatorname{ch} \rho_i(z - z_{k-1}) + B_k \operatorname{sh} \rho_i(z - z_{k-1}) &= \frac{1}{\operatorname{sh} \rho_i z_n} [\bar{f}(\rho_i) \operatorname{sh} \rho_i(z_n - z) + \bar{g}(\rho_i) \operatorname{sh} \rho_i z], \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Introducing this into (4.1) yields the solution of our present case in the form

$$\begin{aligned} u(\rho, z) &= \frac{2}{r^2} \sum_{(\rho_i)} \frac{1}{\operatorname{sh} \rho_i z_n} [\bar{f}(\rho_i) \operatorname{sh} \rho_i(z_n - z) \\ &\quad + \bar{g}(\rho_i) \operatorname{sh} \rho_i z] \frac{J_0(\rho_i \rho)}{J_1^2(\rho_i r)}, \quad 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq z \leq z_n \quad (5.1); \end{aligned}$$

the sum is taken over all the positive roots ρ_i of the equation (2.2), J_0 , J_1 are BESSEL functions of the first kind and the HANKEL transforms $\bar{f}(\rho_i)$, $\bar{g}(\rho_i)$ are defined by the first relation (2.1).

6. A Two-Layered Cylinder

The only matrix $Q_1(\rho_i)$ is of the form

$$Q_1(\rho_i) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \rho_i z_1 & \operatorname{sh} \rho_i z_1 \\ A_1 \operatorname{sh} \rho_i z_1 & A_1 \operatorname{ch} \rho_i z_1 \end{pmatrix},$$

and the expressions $N(\varrho_i)$, $Z(\varrho_i)$ from (3.7) become

$$N(\varrho_i) = \operatorname{sh} \varrho_i z_2 + (A_1 - 1) \operatorname{ch} \varrho_i z_1 \operatorname{sh} \varrho_i l_2,$$

$$Z(\varrho_i) = \operatorname{ch} \varrho_i z_2 + (A_1 - 1) \operatorname{sh} \varrho_i z_1 \operatorname{sh} \varrho_i l_2.$$

Using again (3.7) we find without difficulty

$$N(\varrho_i) [A_1 \operatorname{ch} \varrho_i z + B_1 \operatorname{sh} \varrho_i z] = \bar{f}(\varrho_i) [\operatorname{sh} \varrho_i (z_2 - z) + (A_1 - 1) \operatorname{sh} \varrho_i l_2 \operatorname{ch} \varrho_i (z_1 - z)] + \bar{g}(\varrho_i) \operatorname{sh} \varrho_i z,$$

$$N(\varrho_i) [A_2 \operatorname{ch} \varrho_i (z - z_1) + B_2 \operatorname{sh} \varrho_i (z - z_1)] = A_1 \bar{f}(\varrho_i) \operatorname{sh} \varrho_i (z_2 - z) + \bar{g}(\varrho_i) [\operatorname{sh} \varrho_i z + (A_1 - 1) \operatorname{ch} \varrho_i z_1 \operatorname{sh} \varrho_i (z - z_1)],$$

and the solution (4.1) appears in the form

$$\left. \begin{aligned} u_1(\varrho, z) &= \frac{2}{r^2} \sum_{(e_i)} \frac{J_0(\varrho_i \varrho)}{N(\varrho_i) J_1^2(\varrho_i r)} \{ \bar{f}(\varrho_i) [\operatorname{sh} \varrho_i (z_2 - z) + (A_1 - 1) \operatorname{sh} \varrho_i l_2 \operatorname{ch} \varrho_i (z_1 - z)] + \bar{g}(\varrho_i) \operatorname{sh} \varrho_i z \}, \\ u_2(\varrho, z) &= \frac{2}{r^2} \sum_{(e_i)} \frac{J_0(\varrho_i \varrho)}{N(\varrho_i) J_1^2(\varrho_i r)} \{ A_1 \bar{f}(\varrho_i) \operatorname{sh} \varrho_i (z_2 - z) + \bar{g}(\varrho_i) [\operatorname{sh} \varrho_i z + (A_1 - 1) \operatorname{ch} \varrho_i z_1 \operatorname{sh} \varrho_i (z - z_1)] \}, \\ N(\varrho_i) &= \operatorname{sh} \varrho_i z_2 + (A_1 - 1) \operatorname{ch} \varrho_i z_1 \operatorname{sh} \varrho_i l_2, \\ l_2 &= z_2 - z_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.1);$$

the sums are taken over all the positive roots of (2.2); $\bar{f}(\varrho_i)$, $\bar{g}(\varrho_i)$ are the HANKEL transforms of the given functions $f(\varrho)$, $g(\varrho)$.

References

- [1] I. N. SNEDDON, Fourier Transforms, 1951, McGraw-Hill Book Co.
- [2] V. VODIČKA, A Class of Problems on Longitudinal Vibrations, Quart. Appl. Math. XVI (1958).
- [3] V. VODIČKA, Steady Temperature Field in a Composite Doubly Infinite Strip, J. phys. Soc. Jap. 15 (1960).

Verfasser: Dr. VÁCLAV VODIČKA, Stalinova 52, Pilsen, ČSSR

Ein hinreichendes Konvergenzkriterium und eine Fehlerabschätzung für die Iteration in Einzelschritten bei linearen Gleichungssystemen

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$x = Ax + r \quad (1),$$

dessen Koeffizientenmatrix $A = A_L + A_R$ Summe einer linken unteren Dreiecksmatrix A_L (mit Elementen a_{jk} , $j > k$, und sonst 0) und einer rechten oberen Dreiecksmatrix A_R (mit Elementen a_{jk} , $j \leq k$, und sonst 0) ist, berechnet man bei der Iteration in Einzelschritten, ausgehend von einem beliebigen Vektor x_0 , eine Folge von Vektoren nach der Vorschrift

$$x_{m+1} = A_L x_{m+1} + A_R x_m + r \quad (2),$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

In dieser Mitteilung werden dazu ein neues hinreichendes Konvergenzkriterium und eine neue Fehlerabschätzung, beide gültig für beliebige Matrixnormen, sowie allgemeiner als bisher die Fehlerabschätzung von W. DÜCK für beliebige und die Fehlerabschätzung von L. COLLATZ für monotone, absolute Matrixnormen hergeleitet.

1. Bezeichnungen

Der Raum R_n der Vektoren x und der Raum M_n der quadratischen Matrizen A sind nach Einführung einer Vektor- bzw. Matrixnorm [4] Banachsche Räume.

In M_n wird eine Halbordnung $A \leq B$ erklärt durch a_{jk}, b_{jk} reell, $0 \leq a_{jk} \leq b_{jk}$ ($j, k = 1, \dots, n$).

Mit $|A|$ bezeichnen wir die aus den Beträgen der Elemente von A gebildete Matrix. Eine Matrixnorm heißt:

absolut, wenn $\| |A| \| = \|A\| \quad (3),$

monoton, wenn aus $A \leq B$ folgt $\|A\| \leq \|B\| \quad (4),$

zu einer Vektornorm passend [4], wenn

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \text{ für alle } A \in M_n \text{ und alle } x \in R_n \quad (5).$$

Das Maximum der Beträge der charakteristischen Zahlen von A wird Spektralradius $\varrho(A)$ genannt.

Die Spektralnorm $\|A\| = +\sqrt{\varrho(A'A)}$ ist monoton [5], aber nicht absolut, wie Gegenbeispiele zeigen. Andere gebräuchliche Matrixnormen, wie z. B.

$$\|A\| = \max_j \sum_k |a_{jk}|, \quad \|A\| = \max_k \sum_j |a_{jk}|$$

sind monoton und absolut.

2. Das allgemeine Iterationsverfahren

Das Iterationsverfahren

$$x_{m+1} = Lx_m + s \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

zur Lösung von

$$x = Lx + s \quad (7)$$

konvergiert genau dann [5] für beliebiges $x_0 \in R_n$ gegen die dann eindeutig existierende Lösung von (7), wenn $\varrho(L) < 1$ ist.

Es existiert dann [4] die Matrix $(E - L)^{-1}$, und aus (6), (7) folgt

$$x - x_{m+1} = (E - L)^{-1} L (x_{m+1} - x_m) \quad (8)$$

und daraus (mit zur Vektornorm passender Matrixnorm) die Fehlerabschätzung

$$\|x_{m+1} - x\| \leq \|(E - L)^{-1} L\| \|x_{m+1} - x_m\| \quad (9).$$

Ein bekanntes hinreichendes

Kriterium von J. WEISSINGER [8] für $\varrho(L) < 1$ ist $\|L\| < 1 \quad (10).$

Unter dieser Voraussetzung $\|L\| < 1$ kann die Fehlerschranke in (9) weiter abgeschätzt werden:

$$\|x_{m+1} - x\| \leq \frac{\|L\|}{1 - \|L\|} \|x_{m+1} - x_m\| \quad (11).$$

3. Ein neues hinreichendes Konvergenzkriterium und eine neue Fehlerabschätzung

Da die n -te Potenz der Dreiecksmatrix A_L gleich der Nullmatrix und deshalb

$$(E - A_L)(E + A_L + A_L^2 + \dots + A_L^{n-1}) = E$$

ist, existiert (als Summe einer endlichen geometrischen Reihe) die zu $E - A_L$ inverse Matrix

$$(E - A_L)^{-1} = E + A_L + A_L^2 + \dots + A_L^{n-1} \quad (12).$$

Das Iterationsverfahren in Einzelschritten (2) zur Lösung von (1) kann daher als ein Iterationsverfahren der Art (6) zur Lösung von (7) mit

$$L = (E - A_L)^{-1} A_R \quad (13),$$

$$s = (E - A_L)^{-1} r \quad (14)$$

aufgefaßt werden. Aus (13), (12) ergibt sich

$$\begin{aligned} \|L\| &= \|(E + A_L + A_L^2 + \dots + A_L^{n-1}) A_R\| \\ &\leq (1 + \|A_L\| + \|A_L\|^2 + \dots + \|A_L\|^{n-1}) \|A_R\| \\ &= C = \begin{cases} \frac{1 - \|A_L\|^n}{1 - \|A_L\|} \cdot \|A_R\| & \text{falls } \|A_L\| \neq 1 \\ n \cdot \|A_R\| & \text{falls } \|A_L\| = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

und aus $\|L\| \leq C$ nach (10) das

$$\text{Konvergenzkriterium:} \quad (15)$$

$C < 1$ ist hinreichend dafür, daß die Iteration in Einzelschritten (2) gegen die dann eindeutig existierende Lösung von (1) konvergiert, und daraus nach (11) die

Fehlerabschätzung:

$$\|x_{m+1} - x\| \leq \frac{C}{1-C} \|x_{m+1} - x_m\| \quad (16).$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

4. Bemerkungen zu den Fehlerabschätzungen von L. Collatz und W. Dück

Die Darstellung (6), (13) ermöglicht die Herleitung schon bekannter Fehlerabschätzungen von W. DÜCK [3] bzw. L. COLLATZ [1], [2] und zwar allgemeiner als bisher für beliebige bzw. für monotone, absolute Matrixnormen.

Aus $\|A\| < 1$ folgt die Existenz [4] der Matrix $(E - A)^{-1}$ und damit die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung x von (1). Wegen

$$\begin{aligned} \{E - A\}^{-1} A_R &= \{E - A_L - A_R\}^{-1} A_R \\ &= \{[E - A_L] [E - (E - A_L)^{-1} A_R]\}^{-1} A_R \\ &= [E - (E - A_L)^{-1} A_R]^{-1} [E - A_L]^{-1} A_R \\ &= (E - L)^{-1} L \end{aligned}$$

existiert dann auch die Matrix $(E - L)^{-1}$, es gilt

$$\|(E - L)^{-1} L\| = \|(E - A)^{-1} A_R\| \leq \frac{\|A_R\|}{1 - \|A\|}$$

und nach (9) die

Fehlerabschätzung von W. DÜCK:

$$\|x_{m+1} - x\| \leq \frac{\|A_R\|}{1 - \|A\|} \|x_{m+1} - x_m\| \quad (17).$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

Diese Fehlerabschätzung läßt sich, falls die gewählte Matrixnorm *monoton und absolut* ist, d. h. falls aus

$$|A_R| \leq |A_L| + |A_R| = |A_L + A_R| = |A|$$

die Gültigkeit von

$$\|A_R\| = \||A_R|\| \leq \||A|\| = \|A\|$$

folgt, (vergrößern und) vereinfachen zur

Fehlerabschätzung von L. COLLATZ:

$$\|x_{m+1} - x\| \leq \frac{\|A\|}{1 - \|A\|} \|x_{m+1} - x_m\| \quad (18).$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

Unter der Voraussetzung $\|A\| < 1$ wurde die Konvergenz des Iterationsverfahrens bisher nicht untersucht; es gibt aber ein weiteres hinreichendes

Konvergenzkriterium von J. WEISSINGER [8]:

$$(19)$$

Ist die gewählte Matrixnorm *monoton und absolut* und $\|A\| < 1$, so konvergiert die Iteration in Einzelschritten (2) gegen die dann eindeutig existierende Lösung von (1).

Für die nicht absolute Spektralnrm nennen wir ein Beispiel mit $\|A\|_{\text{spektral}} < 1$, bei dem die Iteration in Einzelschritten (2) divergiert:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\|A\|_{\text{spektral}} = +\sqrt{\frac{3}{4}}, \quad \varrho(L) = 1.$$

5. Vergleich der Konvergenzkriterien und Fehlerabschätzungen

Die Fehlerabschätzung (16) und das zugehörige Konvergenzkriterium (15) sind *beide für beliebige Matrixnormen gültig*, das zur Fehlerabschätzung von W. DÜCK (17) oder L. COLLATZ (18) gehörige Konvergenzkriterium von J. WEISSINGER (19) jedoch nur für *monotone, absolute Matrixnormen*.

An Stelle der Voraussetzung $\|A\| < 1$ von (17), (18), (19) tritt bei (15), (16) die Voraussetzung $C < 1$, die auch für $\|A\| \geq 1$ erfüllt sein kann.

Die Bedingung $C < 1$ läßt zu, daß in der Matrix $E - A_L - A_R$ Elemente von A_L betragsmäßig überwiegen, falls die Elemente von A_R hinreichend kleinen Betrages sind; insbesondere zeigt die Fehlerabschätzung (16) für beliebige A_L und $A_R = 0$ die exakte Lösung nach einem Iterationsschritt an.

Für $\|A\| < 1$ kann, wie Beispiele zeigen, die Fehlerabschätzung (16) besser oder schlechter sein als die Fehlerabschätzungen von L. COLLATZ und W. DÜCK.

Die für die Matrixnorm der maximalen Zeilenbetragssumme (mit Gewichten) gültige Fehlerabschätzung von H. SASSENFELD [6] (und deren Verallgemeinerung von J. SCHRÖDER [7]) ist bezüglich dieser speziellen Norm besser oder genau so gut wie die Fehlerabschätzungen (16), (17), (18).

Literatur

- [1] L. COLLATZ, Fehlerabschätzung für das Iterationsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme, ZAMM 22 (1942), S. 357 bis 361.
- [2] L. COLLATZ, Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis, ZAMP 4 (1953), S. 327—357.
- [3] W. DÜCK, Eine Fehlerabschätzung zum Einzelschrittverfahren bei linearen Gleichungssystemen, Numerische Mathematik 1 (1959), S. 73—77.
- [4] V. N. FADDEEVA, Computational methods of linear algebra, New York 1959, Dover Public., p. 54—62 ff.
- [5] R. OLDENBURGER, Infinite powers of matrices and characteristic roots, Duke, Math. J. (1940), p. 357—361.
- [6] H. SASSENFELD, Ein hinreichendes Konvergenzkriterium und eine Fehlerabschätzung für die Iteration in Einzelschritten bei linearen Gleichungen, ZAMM 31 (1951), S. 92—94.
- [7] J. SCHRÖDER, Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iterationsverfahren, ZAMM 36 (1956), S. 163—181.
- [8] J. WEISSINGER, Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens, Math. Nachr. 8 (1952), S. 193—212.

Verfasser: H. FELDMANN, Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67/69

BUCHBESPRECHUNGEN

W. Lietzmann, Aus meinen Lebenserinnerungen. 114 S. Göttingen 1959. Vandenhoeck & Ruprecht. Preis brosch. DM 6,80.

Die Entwicklung, die der mathematische Unterricht an den höheren Schulen in Deutschland in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts genommen hat und die ihren entscheidenden Anstoß von FELIX KLEIN erhalten hat, ist zu einem bedeutenden Teil dem Wirken WALTER LIETZMANNs zu verdanken. Seine nach seinem Tode (1959) erschienenen, von K. FLADT herausgegebenen Lebenserinnerungen lassen bei aller Bescheidenheit des Verfassers die außerordentliche Bedeutung seiner umfassenden Tätigkeit sichtbar werden, die die normale berufliche Arbeit eines Schulmannes bei weitem übersteigt. Seine Zeit und die vielen hervorragenden Persönlichkeiten, mit denen er in Berührung gekommen ist, werden vor dem geistigen Auge des Lesers noch einmal lebendig, und demjenigen, dem die heutige Problematik des mathematischen Unterrichts Sorgen bereitet, wird vollends klar, daß diese Problematik in vieler Hinsicht gar nicht neu ist, sondern schon von den vorangegangenen Generationen mit großem Ernst erkannt und ihre Lösung auch schon von ihnen mit viel Klugheit versucht worden ist.

Dresden

H. HEINRICH

L. M. Milne-Thomson, Plane Elastic Systems. VIII + 221 S. m. 76 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis brosch. DM 49,80.

Die mathematischen Hilfsmittel werden im Kapitel III bereitgestellt. Der Integralsatz von STOKES wird für die Ebene spezialisiert und für komplexe (nicht notwendig holomorphe) Funktionen formuliert. Es schließen sich an: CAUCHYScher Integralsatz, CAUCHYSche Integralformel, CAUCHYSche Integrale und die Formeln von PLEMELJ. Weiterhin werden die HILBERTSchen Randwertprobleme für Bögen formuliert und die dazugehörigen stückweise holomorphen Funktionen in Gestalt von Integralen hergeleitet, die PLEMELJ-Funktionen enthalten.

Die allgemeine Theorie wird in den Kapiteln I und II geboten, wo die Rolle der AIRYSchen Spannungsfunktion (im isotropen und anisotropen Fall) und der komplexen Spannungsfunktion (im isotropen Fall) dargelegt wird. Die hierbei benötigten Grundlagen der Elastizitätstheorie für ebene Systeme werden aus denen des räumlichen Falles spezialisiert. Diese wiederum werden kurz hergeleitet. Sollte hierbei einigen Lesern die benutzte Symbolik beim Gebrauch des Tensorkalküls („skalare“ und „doppelt-skalare“ Multiplikation von Tensoren [Bezeichnung durch \cdot bzw. $\cdot \cdot$], Dyaden- und ∇ -Rechnung) ungewohnt sein, so ist dies nicht tragisch, weil hierauf später nicht zurückgegriffen wird.

Die Kapitel IV und V beschäftigen sich mit speziellen Problemen beim Vorliegen von geradlinig geschlitzter Ebene, Halbebene, Kreisscheibe, Kreisloch, Kreisbogenschlitz, Kreisring und Halbkreisring. Zur Lösung werden die HILBERTSchen Randwertprobleme aus Kapitel III benutzt.

Die Zurückführung des Falles allgemeinerer Ränder durch konforme Abbildung auf Kreisprobleme zeigt Kapitel VI.

Schließlich wird in Kapitel VII der Einfluß der Anisotropie diskutiert und gezeigt, daß hier keine grundsätzlichen Schwierigkeiten hinzukommen, sondern lediglich eine Vergrößerung der Rechenarbeit auftritt.

Die zu den Kapiteln hinzugefügten Aufgaben (insgesamt 150) sind nicht nur Übungsmaterial; sie beleuchten den behandelten Stoff in einer vom Text verschiedenen Weise.

Dresden

H. WENZEL

A. Duschek, Vorlesungen über höhere Mathematik, Zweiter Band: Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Lineare Algebra. Tensorfelder. Differentialgeometrie. Zweite, neu bearbeitete Aufl. VIII + 401 S. m. 136 Abb. Wien 1958. Springer-Verlag. Preis geb. DM 45,—.

Aus der Besprechung der zweiten Auflage des ersten Bandes (ZAMM 37 (1957), S. 159) ist bekannt, daß das hervorragende Lehrbuch der Höheren Mathematik, das 1951 seine erste Auflage erlebte und in dieser Zeitschrift Bd. 31 (1951), S. 58—59, ausführlich besprochen worden ist, eine andere Stoffeinteilung erfahren hat. Der vorliegende zweite Band enthält jetzt die folgenden Kapitel:

I. Grundbegriffe; Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen (Ergänzungen aus der Lehre von den Punktmengen; Funktionen mehrerer Veränderlicher; Grenzwert und Stetigkeit; Differentiation; homogene Funktionen; TAYLORSche Formel; Doppelfolgen und Doppelreihen; Koordinatentransformation, Punkttransformation und Abbildung zweier Ebenen oder Räume; ebene Kurven; Extrema von Funktionen mehrerer Variabler; Grundbegriffe der Vektorrechnung).

II. Die Integration der Funktionen von mehreren Veränderlichen (Integrale als Funktionen eines Parameters; Kurvenintegrale und lineare Differentialformen; Bereichsintegrale, mehrfache Integrale in Geometrie und Mechanik).

III. Lineare Algebra (Determinanten und Matrizen; lineare Gleichungen; lineare Transformationen, Vektoren und Tensoren; Tensoren zweiter Stufe).

IV. Tensoranalysis und Differentialgeometrie (Begriff des Tensorfeldes und Differentiation der Feldgrößen; Integration der Feldgrößen; Raumkurven; Grundzüge der Flächentheorie).

Anhang: Lösungen der Aufgaben.

Die Vorzüge dieses Werkes sind schon oft hervorgehoben worden: Es schenkt dem Leser nichts, weil es überall die notwendige mathematische Strenge wahrt, kommt ihm aber durch eine außerordentlich klare und, wo es angebracht ist, sehr ausführliche Darstellung entgegen. Es hält viele anschaulich faßbare Beispiele bereit und beachtet die Zusammenhänge mit den Anwendungen in Physik und Technik, wie es für ein Lehrbuch notwendig ist, das für die Studierenden unserer Technischen Hochschulen gedacht ist. Es wäre zu wünschen, daß die Zahl der wissenschaftlich arbeitenden Ingenieure, deren mathematische Bildung dem Inhalt und Niveau dieses ausgezeichneten Lehrbuches entspricht, nicht zu klein bleibt.

Dresden

H. HEINRICH

V. Fock, Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. XIX + 501 S. Berlin 1960. Akademie-Verlag. Preis geb. DM 42,50.

In dem vorliegenden Buch konnte Professor FOCK, der bekanntlich zu der Entwicklung der Relativitätstheorie insbesondere in den letzten 25 Jahren Beiträge von grundlegender Bedeutung gegeben hat, ein nach zwei Richtungen zielendes Programm in besonders harmonischer Weise erfüllen. Erstens gibt er eine ausführliche Darstellung des klassischen Inhalts desjenigen Gebietes der Physik, welches man gewöhnlich als Relativitätstheorie bezeichnet. Darüber hinaus stellt er in den beiden letzten Kapiteln des Buches systematisch die zu einem großen Teil von ihm persönlich stammenden neueren Entwicklungen in der Relativitätstheorie zusammen. Dadurch ist ein Buch entstanden, welches für Physiker oder Mathematiker, die die Relativitätstheorie kennenlernen wollen, besonders wertvoll und für den in der Relativitätstheorie arbeitenden Forscher unentbehrlich wird.

Die folgenden Zeilen mögen den Inhalt des Buches näher erläutern. Die Kapitel 1 und 2 behandeln die spezielle Relativitätstheorie in 3- und 4-dimensionaler Form. Das 3. Kapitel enthält eine Einführung in die Tensorrechnung für RIEMANNsche Räume. Das 4. Kapitel gibt dann eine Darstellung der speziellen Relativitätstheorie bei Verwendung von beliebigen Koordinatensystemen.

In den übrigen Kapiteln wird die EINSTEINSche Gravitationstheorie behandelt. Insbesondere ist in Kapitel 5 der klassische Inhalt dieser Theorie zusammengestellt: Die Aufstellung der Feldgleichungen und ihre allgemeine Diskussion, die Herleitung der SCHWARZSCHILDschen Lösung und der 3 allgemeinen relativistischen Effekte. Die besonders tiefgehende Analyse des EINSTEINSchen Äquivalenzprinzips, die dieses Kapitel enthält, sei hervorgehoben.

Kapitel 6 enthält dann eine ausführliche Darstellung der zu einem großen Teil vom Verfasser selbst stammenden neueren Ergebnisse bezüglich des Bewegungsproblems in der allgemeinen Relativitätstheorie, welches bekanntlich in der Herleitung der Bewegungsgleichungen für die das Gravitationsfeld erzeugenden Körper aus den Feldgleichungen besteht.

In dem letzten Kapitel wird zunächst die Diskussion des Bewegungsproblems weiter verfolgt, diesmal im Zusammenhang mit dem Problem der Gravitationsstrahlung: Das Gravitationsfeld wird in der ersten Näherung für große Entfernungen von den felderzeugenden Körpern bestimmt und dann die von diesen Körpern emittierte Gravitationsstrahlung diskutiert. Es folgt eine methodische Darstellung der Gedanken und Argumente des Verfassers, die ihn zu seiner schon viel diskutierten Forderung veranlaßten, die allgemeine Kovarianz der Gravitationstheorie mittels einer mit den Feldgleichungen verträglichen Zusatzbedingung — der Harmonizitätsbedingung — so einzuschränken, daß man auch in dieser Theorie zu physikalisch bevorzugten Koordinatensystemen gelangt. Die hier gegebene ausführliche Zusammenstellung dieser Argumente sowie der vom Verfasser bisher erreichten diesbezüglichen Ergebnisse werden den in diesem Gebiet arbeitenden Forschern wertvolle Anregungen geben.

Es ist sehr zu begrüßen, daß dieses schon im Jahre 1955 in russischer Sprache erschienene Buch jetzt auch in deutscher Sprache vorliegt.

Berlin

A. PAPAPETROU

S. Krug — P. Stein, Einflußfelder orthogonal anisotroper Platten. Influence surfaces of orthogonal anisotropic plates. In deutscher und englischer Sprache. Englische Übersetzung durch H. Juhl. VIII + 32 S. m. 31 Abb. u. 193 Tafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 67,50.

In Erweiterung des bekannten Einflußfelder-Bandes von FUCHER für die Schnittkräfte isotroper Platten werden in vorliegendem Tafelwerk die Einflußfelder für die Feldmitten- und Randmittenmomente derjenigen orthogonal-anisotropen Platten angegeben, die der HUBERSchen Differentialgleichung genügen. Die theoretischen Grundlagen für die Übertragung der Singularitätenmethode auf orthogonal-anisotrope Platten und der zweckmäßige Lösungsaufbau wurden von den Verfassern in ihren Dissertationen erarbeitet. Im Sinne eines handlichen Tafelwerkes für den praktischen Gebrauch wurden in den vorliegenden Band von den Verfassern nur die für die Auswertung der Einflußfelder erforderlichen Angaben aufgenommen; die Auswertung wurde an Beispielen ausführlich demonstriert. Die Vielzahl der aufzunehmenden Seiten- und Steifigkeitsverhältnisse konnte durch zwei Maßnahmen auf ein erträgliches Maß beschränkt werden. Analog zu den Einflußflächenangaben von HOMBERG für die unendlich langen, an zwei Rändern frei dreh-

bar gelagerten orthotropen Platten wurden auch hier die Platten- und Lastkoordinaten transformiert, so daß zur Beschreibung der geometrischen und elastischen Eigenschaften einer Platte zwei Parameter — das „modifizierte“ Seitenverhältnis

$$\epsilon = \frac{l_y}{l_x} \sqrt{\frac{B_x}{B_y}}$$

und der „effektive“ Drillsteifigkeitsfaktor κ — ausreichen. Die Einflußfelder wurden für fünf Werte ϵ , drei Werte κ und sechs Randbedingungskombinationen in 193 Tafeln angegeben. Für Zwischenwerte ϵ wurden die Interpolationsmöglichkeiten erläutert, für abweichende κ -Werte konnten Inter- bzw. Extrapolationsformeln angeschrieben werden. Auf die Anwendungsmöglichkeit dieser Einflußfelder für spezielle durchlaufende Systeme wurde hingewiesen.

Neben der Möglichkeit einer einfachen und raschen Untersuchung der genannten (kontinuierlichen) orthotropen Platten gestattet das vorgelegte Tafelwerk auch Trägerroste im Sinne von GUYON und MASSONET mit guter Näherung zu berechnen.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß das sehr gut ausgestattete Tafelwerk bald einen festen Platz in der Konstruktionspraxis einnehmen wird.

Dresden

G. BÜRGERMEISTER

I. I. Gol'dman and V. D. Krivchenkov, Problems in Quantum Mechanics. 275 S. m. 33 Abb. Oxford/London/New York/Paris 1961. Pergamon Press. Preis geb. 50 s.

Das Buch enthält eine Aufgabensammlung mit Lösungen zur Quantentheorie, die für Studenten des 4. Studienjahres gedacht ist. Die einzelnen Beispiele sind der praktischen Erfahrung erwachsen, die beim Unterricht dieses Faches an der Moskauer Lomonossow-Universität gewonnen wurden. Ihrem Thema nach beschränken sich die Aufgaben auf die nicht-relativistische Quantentheorie. Besonders sorgfältig sind Fragen herausgearbeitet, bei denen Drehimpuls und Spin eine Rolle spielen. Auch Aufgaben, deren Lösung das Rechnen mit Matrizen erfordert und die erfahrungsgemäß den Studenten besondere Schwierigkeiten machen, sind in die Sammlung aufgenommen worden. Das Buch enthält zwei Anhänge, einen über die WKB-Methode zur näherungsweisen Berechnung der Wellenfunktion, und eine kurze, aber sehr klare und durchsichtige Beschreibung des Isotopenspins von Nukleonen.

Dresden

W. MACKE

V. N. Faddeyeva — N. M. Terent'ev, Tables of Values of the Function

$$w(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right)$$

for Complex Argument. 280 S. Oxford/London/New York/Paris 1961. Pergamon Press. Preis geb. £ 5.

Die vorliegende Tafel (eine Übersetzung aus dem Russischen) enthält sechsstellige Werte der obigen Funktion $w(z) = u + iv$ ($z = x + iy$), die in vielen Gebieten der Theoretischen Physik (Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, Quantenmechanik, Astrophysik u. a.) vorkommt, und zwar in Tafel I für $x = 0(0,02)3$ und $y = 0(0,02)3$ und in Tafel II für $x = 3(0,1)5$ und $y = 0(0,1)2,9$ sowie für $x = 0(0,1)5$ und $y = 3(0,1)5$. In sieben Spalten sind x , u , v sowie deren modifizierte 1. Differenzen und 2. Differenzen (in x -Richtung) für jeweils ein y zusammengestellt. Bei quadratischer Interpolation (hierfür sind geeignete vereinfachte Formeln angegeben) beträgt der Interpolationsfehler in Tafel I höchstens ein bis zwei Ein-

heiten der sechsten Dezimale, in Tafel II — bis auf gewisse Bereiche in der Nähe der reellen Achse — ebenfalls.

In der Einführung werden zunächst ausführlich die Eigenschaften der Funktion $w(z)$ behandelt: Integraldarstellungen, Potenzreihenentwicklung, Zusammenhang mit Kettenbrüchen und asymptotisches Verhalten. Da $w(iy)$ reell ist, nimmt $w(z)$ konjugiert komplexe Werte in symmetrisch zur imaginären Achse gelegenen Punkten an; ferner gilt $w(-z) = 2e^{-z^2} - w(z)$.

Dadurch konnte die Tafel auf den Bereich $x \geq 0$, $y \geq 0$ beschränkt werden. Dann folgen Hinweise auf die Berechnung der Tafel, wobei auch die durchgeführten Kontrollen erwähnt werden. Die Benutzung der Tafel wird anschließend an einigen Beispielen erläutert, und zum Abschluß wird das Berechnen von Werten außerhalb des tabulierten Bereichs besprochen (ebenfalls mit Beispielen).

Dresden

A. SCHUBERT

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

P. Moon and D. E. Spencer, Field Theory Handbook. Including Coordinate Systems Differential Equations and their Solutions. VIII + 236 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 69,—.

Structure of Language and its Mathematical Aspects. (Proceedings of Symposia Applied Mathematics, Volume XII.) VI + 279 S. Providence, Rh. I., 1961. American Mathematical Society. Preis geb. \$ 7.80.

Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1. V + 306 S. Providence, Rh. I., 1961. Printed for Institute of Mathematical Statistics by American Mathematical Society. Preis geb. \$ 4.80.

J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. 331 S. m. 14 Abb. Berlin 1961. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. DM 37,50.

Zweiter Ungarischer Mathematischer Kongreß, Budapest, 24.—31. August 1960. Band I u. II. Budapest 1961. Akadémiai Kiadó.

S. Flügge, Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band I: Einführung. Elementare Mechanik und Kontinuumsphysik. 256 S. m. 47 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 25,80.

G. B. Thomas, Calculus. Sec. Ed. XIII + 850 S. m. 348 Abb. u. 4 Tafeln. London 1961. Addison-Wesley Publishing Comp. Preis geb. \$ 8.75.

S. Vajda, Mathematical Programming. IX + 310 S. London 1961. Addison-Wesley Publishing Company. Preis geb. \$ 9.00.

E. Pestel, E. Kollmann, Grundlagen der Regelungstechnik. Ein Lehrbuch für Studierende und Ingenieure. (Regelungstechnik in Einzeldarstellungen, Band 1.) VII + 322 S. m. 396 Abb., 20 Tab. u. 148 Übungsaufgaben. Braunschweig 1961. Friedr. Vieweg & Sohn. Preis geb. DM 33,—.

Fr. A. Willers, Elementar-Mathematik. 10. Auflage. VIII + 267 S. m. 172 Abb. Dresden und Leipzig 1961. Verlag von Theodor Steinkopff. Preis geb. DM 16,—.

A. Haerter, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Lüftungsanlagen von Straßentunneln. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, Nr. 29.) 101 S. Zürich 1961. Verlag Leemann.

N. Athanassiadis, Potential Flow through Spiral Casings. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Nr. 30.) 175 S. Zürich 1961. Verlag Leemann.

B. M. Brown, The Mathematical Theory of Linear Systems. XV + 267 S. London 1961. Chapman & Hall Ltd. Preis geb. 50 s. net.

Jordan-Eggert-Kneisel, Handbuch der Vermessungskunde. Zehnte, völlig neu bearbeitete und neu gegliederte Ausgabe. Band I: Mathematische Grundlagen, Ausgleichsrechnung und Rechenhilfsmittel. XVI + 808 S. m. 208 Abb. Stuttgart 1961. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung. Preis geb. DM 160,—.

V. L. Zaguskin, Handbook of Numerical Methods for the Solution of Algebraic and Transcendental Equations. Translated from the Russian. XIX + 195 S. Oxford/London/New York/Paris 1961. Pergamon Press. Preis geb. 40 s.

N. A. Archangelski — B. I. Saizew, Automatische Ziffernrechenmaschinen. 130 S. m. 23 Abb. Berlin 1960. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis brosch. DM 5,80.

S. Hartman and J. Mikusiński, The Theory of Lebesgue Measure and Integration. Translated from Polish. 176 S. Oxford/London/New York/Paris 1961. Pergamon Press. Preis geb. 30 s.

H. Benz, Über eine Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedeutung für die Arithmetik. (Heft 9 der Schriftenreihe der Institute für Mathematik.) 149 S. m. 5 Abb. Berlin 1961. Akademie-Verlag. Preis brosch. DM 29,50.

H. F. Chilmi, Qualitative Methoden beim n -Körperproblem der Himmelsmechanik. (Heft 10 der Schriftenreihe der Institute für Mathematik.) 116 S. m. 4 Abb. u. 1 Tab. Berlin 1961. Akademie-Verlag. Preis brosch. DM 23,—.

W. Klein, Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen. XII + 259 S. m. 120 Abb., 3 Kunsttafeln, 1 Übersichtstafel u. 2 Tab. Berlin 1961. Akademie-Verlag. Preis geb. DM 39,—.

O.-H. Keller, Zur Berechnung des Galois'schen Körpers und der Galois'schen Gruppe einer Gleichung in erträglich vielen Schritten. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Band 104, Heft 5.) 21 S. Berlin 1961. Akademie-Verlag. Preis brosch. DM 2,—.

G. Rackwitz, Praktische Mathematik. (Taschenbücher für Holztechnik und Holzwirtschaft, Bd. I.) XII + 147 S. m. 55 Abb. Prien/Chiemsee 1961. Helmut Bücking Verlag. Preis brosch. DM 14,80.

H. Hasse / W. Klobe, Aufgabensammlung zur Höheren Algebra. 3. Aufl. (Sammlung Göschen, Band 1082.) Berlin 1961. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. DM 3,60.

F. Schytil, Wirbelschichttechnik. VIII + 120 S. m. 87 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis brosch. DM 16,50.

H. Hermes, Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Einführung in die Theorie der rekursiven Funktionen. X + 246 S. m. 3 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 49,80.

D. Morgenstern und I. Szabó, Vorlesungen über Theoretische Mechanik. XII + 374 S. m. 112 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 69,—.

S. Glasstone und M. C. Edlung, Kernreakortheorie. Eine Einführung. X + 341 S. m. 82 Abb. Wien 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 44,70.

* **G. Lefort**, Algèbre et analyse exercices. XI + 517 S. m. 29 Abb. Paris 1961. Dunod. Preis geb. 44 NF.

H. Woll, Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 3. Lieferung. Hamburg 1961. Hanseatische Verlagsanstalt GmbH. Preis brosch. DM 6,80.

V. M. Blanco und S. W. McCuskey, Basic Physics of the Solar System. XI + 307 S. London 1961. Addison-Wesley Publishing Comp. Preis geb. \$ 8,50.

W. T. Martin und E. Reissner, Elementary Differential Equations. Sec. Ed. XIII + 331 S. London 1961. Addison-Wesley Publishing Comp. Preis geb. \$ 6,75.

W. Furrer, Raum- und Bauakustik, Lärmabwehr. 258 S. m. 195 Abb. Basel und Stuttgart 1961. Birkhäuser Verlag. Preis geb. sFr. 38,50.

NACHRICHTEN

Internationales Kolloquium über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften

In der Zeit vom 8.—10. Juni 1961 führte das Institut für Mathematik der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar unter Leitung von Herrn Prof. Dr. habil. H. MATZKE ein Internationales Kolloquium über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften mit dem Rahmenthema „Anwendungen elektronischer Rechenanlagen in der Bau- und Baustoffindustrie“ durch. Die Veranstalter hatten es sich zur Aufgabe gemacht, über dieses aktuelle Thema erstmalig in der DDR einen breiten Erfahrungsaustausch anzuregen. Teilnehmer waren etwa 150 Mathematiker und Ingenieure aus beiden Teilen Deutschlands, aus der UdSSR, ČSSR, aus Ungarn, Polen und Indien, die sich mit Problemen der Baumechanik und der Ökonomie des Bauwesens beschäftigten.

Folgende Hauptvorträge wurden gehalten: S. FALK, Braunschweig, Knickbiegung von Durchlaufträgern; A. JUNG, Jena, Ingenieurtechnische Probleme im Rechenzentrum Jena; H. KRETZSCHMAR, Dresden, Einsatz elektronischer Rechenanlagen im Stahlbau; M. RÓZSA, Budapest, Berechnung von Tragwerken mit Hilfe von Digitalautomaten; W. ZERNA, Hannover, Betrachtungen und Erfahrungen über den Einsatz elektronischer Rechenanlagen im Bauingenieurwesen; R. ZURMÜHL, Darmstadt, Anwendung der Matrizenrechnung in der Statik.

Weiterhin informierten 18 Kurzvorträge u. a. über den Einsatz von Ziffernrechnern und Analogrechnern im Bauwesen sowie über Anwendungen der linearen Programmierung in der Bauökonomie und Gebietsplanung. Die Vorträge sollen in einem Sonderheft der Wissenschaftlichen Hochschulzeitschrift mit sämtlichen Vorträgen herausgegeben werden.

H. MATZKE

BERICHTIGUNGEN

Zu H. Buchholz, Die Erwärmung in metallischen Kreislochscheiben . . ., ZAMM 41 (1961), S. 229—238:

In der obigen Arbeit sind folgende Änderungen vorzunehmen:

1. Gleichung (2) auf S. 231 lautet:

$$\frac{d^2 \bar{\theta}(v_0; p)}{dv_0^2} + \frac{1}{v_0} \cdot \frac{d\bar{\theta}(v_0; p)}{dv_0} + \bar{\theta}(v_0; p) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right) = -\frac{\Theta_B}{p} \cdot \frac{1}{v_0^2} \quad [1/p] = \sec \quad . \quad (2).$$

2. In Gleichung (7) auf S. 232, 2. Zeile, lautet im Argument von J_0 der erste Faktor $i b$ anstelle von b .

3. Auf S. 233 ist in der Formelzeile zwischen den Gleichungen (3) und (3a) q durch q^2 zu ersetzen.

4. Auf S. 234 ist in den beiden Textzeilen unter Gleichung (6a) γ durch r zu ersetzen.

5. Auf S. 236 ist in der zweiten Zeile der Gleichung (14) die letzte Klammer zu streichen.

6. Auf S. 237 steht in Gleichung (18b) $h_{p,r}^2$ anstelle von $h_{p,r}$.

Zu B. Tanimoto, The Reciprocal Theorem for Applied Mechanics, ZAMM 41 (1961), S. 185—197:

Der Verfasser teilt mit, daß auf S. 197 in dem Ausdruck für w' auf der vierten Zeile das letzte Pluszeichen zu streichen ist.

WISSENSCHAFTLICHE GRUNDLAGEN DER MODERNEN TECHNIK

Herausgegeben von Prof. Dr. Hans Frühauf, Prof. Dr. Robert Rompe,
Prof. Dr. Kurt Schröder, Prof. Dr. Erich Thilo, Prof. Dr. Hans Gummel,
Prof. Dr. Hermann Klare, Prof. Dr. Eberhard Leibnitz

Reihe A: Tagungen

Band 1

ELEKTROTECHNIK UND MASCHINENBAU

Vorträge, gehalten auf der Tagung der Forschungsgemeinschaft
am 8. und 9. 12. 1960 in Berlin-Adlershof

1961. 168 Seiten — 67 Abbildungen — 24 Tabellen — gr. 8° — Halbleinen DM 9,80

Am 8. und 9. Dezember 1960 veranstaltete die Forschungsgemeinschaft der naturwissenschaftlichen, technischen und medizinischen Institute der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin eine Konferenz „Über wissenschaftliche Grundlagen der modernen Technik — Elektrotechnik und Maschinenbau“.

Die Ergebnisse der Konferenz liegen mit dieser Arbeit vor. Sie dienen der Entwicklung und Festigung der wissenschaftlichen Grundlagen für die Produktion. Namhafte Wissenschaftler und Praktiker berichten über Entwicklungstendenzen auf dem Gebiet der Elektrotechnik und im Maschinenbau, über Probleme moderner physikalischer Analysemethoden, über Gebiete neuer metallischer Werkstoffe für Elektrotechnik und Maschinenbau und über Kunststoffe mit besonderen physikalischen Eigenschaften.

Die Vorträge geben in einer leicht verständlichen wissenschaftlichen Darstellung einen ausgezeichneten Überblick über den Stand und die Entwicklungsrichtung des jeweils behandelten Gebietes. Sie zeigen die Bedeutung, die die Anwendung der neuesten Forschungsergebnisse für die industrielle Fertigung besitzt. Deshalb stellt sich die Forschungsgemeinschaft mit dieser Schriftenreihe die Aufgabe, diese Ergebnisse aus dem Bereich der naturwissenschaftlich-technischen Institute der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin schnell unserer Industrie zur Verfügung zu stellen. Damit soll erreicht werden, daß unsere industriellen Produkte den Höchststand der modernen Technik aufweisen.

In Vorbereitung

Band 2

KONTAKTWERKSTOFFE IN DER ELEKTROTECHNIK

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten



A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N

physica status solidi

Herausgegeben von den Herren Professoren Dr. P. AIGRAIN, Paris — Dr. S. AMELINCKX, Mol-Donk — Dr. W. DEKEYSER, Gent — Dr. W. FRANZ, Hamburg — Dr. G. F. J. GARLICK, Hull — Dr. Dr. h. c. P. GÖRLICH, Jena — Dr. E. GRILLOT, Paris — Dr. R. KAISCHEW, Sofia — Dr. P. T. LANDSBERG, Cardiff — Dr. L. NÉEL, Grenoble — Dr. A. PIEKARA, Poznań — Dr. A. SEEGER, Stuttgart — Dr. O. STASIW, Berlin — Dr. M. STEENBECK, Jena — Dr. F. STÖCKMANN, Karlsruhe — Dr. G. SZIGETI, Budapest und Herrn Dr. J. TAUC, Praha

Schriftleitung: Prof. Dr. PAUL GÖRLICH, Jena

Redaktionskollegium: Dr. S. OBERLÄNDER, Dr. E. GUTSCHE, W. BORCHART

Je Heft etwa 100 Seiten, mit Abbildungen, im Format 16,7×24 cm, zum Preise von DM 6,—

Erscheinungsweise: monatlich

In dieser neuen Zeitschrift werden Arbeiten der Grundlagenforschung aus dem Gesamtgebiet der Festkörperphysik veröffentlicht.

Insbesondere wird über die Atomistik der Festkörpereigenschaften, zum Beispiel über Bau und Bildung von Kristallen

sowie deren Struktur, über mechanische und thermische Eigenschaften fester Körper, ihre elektrische Leitfähigkeit, die Wechselwirkung mit elektromagnetischer und korpuskularer Strahlung sowie über die elektrische und magnetische Eigenschaften berichtet, sowie neue Forschungsergebnisse vorliegen.

Die monatlich erscheinenden Hefte bestehen aus den Teilen:

Zusammenfassende Berichte über aktuelle Teilgebiete der Festkörperphysik

Originalarbeiten, die nicht schon an anderer Stelle veröffentlicht wurden und neue wissenschaftliche Erkenntnisse enthalten

Kurze Originalmitteilungen

Vorabdruck des Titels und der kurzen Zusammenfassung von Originalarbeiten dieser Zeitschriften sowie (in englischer Übersetzung) der „Fizika Tverdogo Tela“

Die Zeitschrift *physica status solidi* soll als internationales Organ der Festkörperphysik eine möglichst rasche Veröffentlichung der neuen Erkenntnisse und Forschungsergebnisse garantieren, und durch Konzentration wichtiger Arbeiten dieses Fachgebietes, insbesondere aus den europäischen Län-

dern, die bestehenden Publikationsorgane wirkungsvoll ergänzen. Die Arbeiten erscheinen in deutscher, englischer, französischer oder russischer Sprache. Eine kurze Zusammenfassung der Arbeiten wird auch in einer anderen Sprache als der des Originaltextes jedem Beitrag vorangestellt.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten



A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N